Золотые пирамиды и золотой конус Кеплера

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Представлен анализ работы В. Соловьева, посвященной теории и практике применения золотой константы. Выполнена уточняющая реконструкция модели. Даны терминологические поправки и уточнения. Введены новые понятия в геометрии: золотые пирамиды и золотой конуса Кеплера. В их осевом сечении наличествует известный треугольник Кеплера, имеющий ряд уникальных свойств, обусловленных золотой пропорцией. Описаны особенности рассматриваемых геометрических объектов.

Устойчивость пирамиды редко зависит от вершины,
но всегда именно вершина привлекает наше внимание.
Иосиф Бродский

Оглавление

Введение

С удовлетворением ознакомились с основным результатом статьи В. Соловьева [1].

Пусть не совсем строго в рассуждениях и представлении материала, но автор, в конечном итоге, вышел на хороший пример проявления константы золотого сечения (ЗС) при минимизации величины апофемы в правильной пирамиде с вписанной в неё сферой.

Сначала думали ограничиться небольшой ремаркой в части дополнений-уточнений.

Но структурное изложение в таком формате оказалось не репрезентативным.

В работе одновременно переплелись разные вопросы, в том числе принципиальные.

Заявленная автором практическая часть, равно как и физическая трактовка, на наш взгляд, также имеют изъяны.

Во всяком случае, они нуждаются в повторном переосмыслении.

Дополнительно отметим, что для четырехугольной пирамиды похожий результат на поиск экстремума получен в работе проф. А. Шелаева [2, с. 4] в параметрах минимальной длины образующей конуса, вписанного в египетскую пирамиду Хеопса, при фиксированном радиусе шара, вписанного в эту же пирамиду.

Некоторые положения

Чтобы легче ориентироваться в задаче на вписанный в пирамиду шар, полезно вкратце вспомнить несложную теоретическую подоснову, например, по материалам [3].

Вписанный в пирамиду шар (сфера) касается всех её граней.

Иначе говоря, грани пирамиды лежат в касательных плоскостях шара.

Отрезки, соединяющие центр шара с точками касания, перпендикулярны к касательным плоскостям. Их длины равны радиусу шара.

Центр вписанного в пирамиду шара – точка пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при основании. То есть плоскостей, делящих эти углы пополам.

Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.

Его центр в этом случае лежит на высоте пирамиды.

При решении задачи удобно провести осевое сечение пирамиды и вписанной сферы плоскостью, проходящей через апофему и высоту пирамиды.

В правильной $2k$-угольной пирамиде, с четным числом ребер в основании, сечение представляет собой равнобедренный треугольник. Его боковые стороны – апофемы, основание – диаметр окружности, вписанной в основание пирамиды.

В правильной $(2k + 1)$-угольной пирамиде, с нечетным числом ребер в основании, сечением становится разносторонний треугольник.

Поэтому в общем виде правильной n-угольной пирамиды достаточно рассмотреть только часть сечения, а именно прямоугольный треугольник (рис. 1), катеты которого – высота пирамиды h и радиус окружности r, вписанной в основание пирамиды, гипотенуза – апофема A; R – радиус шара (сферы), вписанного в пирамиду.

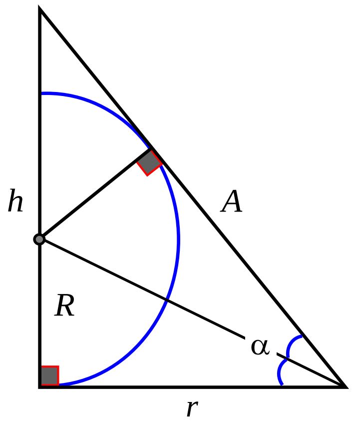


Рис. 1. Часть сечения правильной многоугольной пирамиды

Реконструкция модели

Сначала несколько слов о логике и ходе рассуждений автора работы [1].

Формулировка, что берется шар "*произвольного радиуса*", не точна.

В евклидовой геометрии не рассматриваются бесконечно малые или бесконечно большие тела.

Фиксация конечности тоже не обязательна. И так понятно, если оное не оговорено специально.

В правильной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под одним (одинаковым) углом, отсюда лучше использовать единственное число.

Доказательство автор ограничивает рассмотрением только сечения $2k$-угольной пирамиды, и затем непонятно для чего проводит наклонные плоскости.

Далее ставит задачу «найти такой угол наклона, при котором отрезок <апофема> был бы минимальным для заданного шара радиуса». Хотя из предшествующего текста ещё не видно, что такой минимум существует.

Конечно, можно рассматривать и такую задачу. Но тогда её не нужно "монтировать в тело" доказательства.

Выполним некоторую реконструкцию модели, с учетом обозначений: $\Phi, \phi = (\sqrt{5} \pm 1)/2$.

Утверждение. Длина апофемы правильной пирамиды, описанной вокруг шара, минимальна, если угол наклона боковых граней равен $\alpha = \arccos\phi = \mathrm{arctg}\sqrt{\Phi} \approx 51{,}83^{\circ}$.

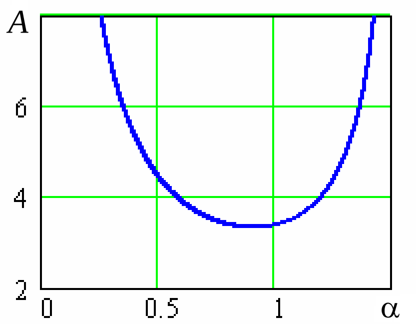


Рис. 2. Зависимость апофемы правильной пирамиды от угла наклона боковых граней

Рассмотрим часть осевого сечения, проходящего через апофему правильной *n*-угольной пирамиды (см. рис. 1).

Из свойств прямоугольных треугольников следует, что длина апофемы *A* является непрерывной нелинейной функцией от угла наклона α боковых граней (рис. 2):

$$A(\alpha) = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Приравняв нулю первую производную и выполнив тригонометрические преобразования, получаем квадратное уравнение $\sec^2\alpha - \sec\alpha - 1 = 0$ относительно секанса угла – величины, обратной косинусу этого угла $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$.

Положительным корнем-решением уравнения является искомое утверждение.

Собственно и всё.

Вторую производную для уточнения характера экстремума можно не анализировать, – из графика и так виден минимум.

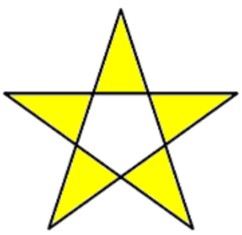
Можно, конечно, обойтись и без графика. Тогда вторая производная необходима.

Другой вариант постановки исходной задачи состоит в рассмотрении шара и прислоненной к нему под углом α плоскости.

Решение получается аналогично, и затем при желании переводится в понятийную область «шара, вписанного в правильную пирамиду».

Терминологические уточнения и предпочтения

1) Автор [1] называет треугольник (см. рис. 1) золотым.



Для точности лучше добавить «золотой <прямоугольный> треугольник Кеплера».

Золотым треугольником чаще называют равнобедренный треугольник, у которого отношение длин боковой стороны и основания равняется Φ, с углами $(72^{\circ}, 72^{\circ}, 36^{\circ})$.

Такими фигурами являются концы правильной пятиугольной звезды с их известной инфляцией (склеиванием) и дефляцией (разрезанием) во взаимосвязи с другим треугольником $(108^{\circ}, 36^{\circ}, 36^{\circ})$ [4].

2) Термин "золотой конус" вполне приемлем.

Впервые он предложен в нашей работе [5, с. 14].

Фигура приобретает новое содержание и замечательные свойства (см. ниже).

Поскольку половина осевого сечения такого конуса является прямоугольным треугольником Кеплера, то вполне подойдет также уточняющее название: "золотой конус Кеплера".

3) Термин "угол золотого сечения" следует признать неудачным ввиду его непонятности и неопределенности.

Само по себе золотое сечение практически не связано с углами. Кроме того, можно привести десятки разных вариантов-зависимостей углов от константы Ф.

Поэтому в рассматриваемом случае правильнее вести речь о конкретном численном соотношении $\alpha = \arccos\phi$.

Отсюда меняется и стилистика в представлении результатов исследования [1].

На теорему в геометрии постулируемое положение явно не дотягивает.

В математике теоремами обычно называют доказанные утверждения, которые находят *широкое применение* в решении математических задач.

Например, теорема Пифагора.

В данном случае больше подходят такие формы представления, как суждение, предложение, утверждение и т.п.

Достаточно посмотреть на работы проф. д.ф.-м.н. А. Шелаева, в которых приведены разнообразные задачи на отыскание экстремумов функций, связанных с константой ЗС.

Без теорем, лемм и подобных терминов. Обычным перечислением выявленных замечательных свойств. Ибо математик прекрасно знает цену-статус теорем.

4) Автор используется понятие «пропорции золотой пирамиды».

Конечно, они существуют.

Только в своей таблице он приводит не пропорции (как заявлено), а обычные отношения двух величин одинаковой размерности.

Что далеко не одно и то же.

Выбор метрических величин

В общем случае назначение конкретных метрических значений для параметров фигур и тел может варьироваться. Чаще на усмотрение исследователя.

Так, в работе [1] привязка выполнена по отношению к радиусу вписанной сферы, что негативно влияет на качестве визуализации формул.

В статье [2] единичной метрикой выбран радиус вписанной в основание пирамиды окружности $r = 1$. Что уже лучше, поскольку легко привязывается к числовой оси или координатной оси абсцисс.

В предельном выражении n-угольная золотая пирамида Кеплера становится конусом $(n \to \infty)$, поэтому, на наш взгляд, демонстрацию свойств удобнее соотнести с характеристиками прямого кругового конуса, положив его высоту равной единице $h = 1$:

$$(r,\ h,\ l = A) = \left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right).$$

Тогда объем конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\phi$.

Площадь боковой поверхности $S_б = \pi rl = \pi$.

Площадь основания $S_о = \pi r^2 = \pi\phi$.

Площадь полной поверхности $S_п = \pi\left(r^2 + rl\right) = \pi\Phi$.

Таким образом, площади золотого конуса Кеплера образуют золотую пропорцию

$$\frac{S_\text{п}}{S_\text{о}} = \frac{S_\text{о}}{S_\text{б}} = \Phi .$$

При этом для единичной высоты площадь боковой поверхности численно равна π!

Обратная задача соотнесения площадей конуса через золотую пропорцию также приводит к золотому конусу Кеплера

$$\frac{r+l}{l} = \frac{l}{r} = \Phi .$$

Радиусы вписанной и описанной сфер соответственно равны $\phi^2, \Phi/2$.

Параметры золотой пирамиды Кеплера

Приняв в качестве единицы измерения высоту пирамиды можно определить характерные параметры n-угольной золотой пирамиды Кеплера.

Часть из них представлена в табл. 1.

Таблица 1

Некоторые параметры *n*-угольной золотой пирамиды Кеплера с единичной высотой

Наименование параметра	Расчетная формула для численных значений
Высота, h	1
Радиус окружности, вписанной в основание, r	$\sqrt{\phi}$
Апофема, A	$\sqrt{\Phi}$
Ребро основания, a	$2\sqrt{\phi}\ \mathrm{t}$
Боковое ребро, l	$\sqrt{\Phi+\phi\,\mathrm{t}^2}$
Радиус вписанного шара, R	ϕ^2
Радиус описанного шара, R'	$l^2/2$
Площадь боковой грани, S	t
Площадь боковой поверхности, $S_\text{б}$	$n\,\mathrm{t}$
Площадь основания, $S_\text{о}$	$\phi\, n\,\mathrm{t}$
Площадь полной поверхности, $S_\text{п}$	$\Phi\, n\,\mathrm{t}$
Объем пирамиды	$\frac{1}{3}\phi\, n\,\mathrm{t}$
Угол наклона боковой грани, α	$\arccos\phi$
Угол наклона бокового ребра, γ	$\arcsin l^{-1}$

Примечание: $\mathrm{t} = \mathrm{tg}\, \pi/n$.

При неограниченном возрастании числа боковых граней n пирамида превращается в прямой круговой конус.

Возникающая в формулах неопределенность вида "$\infty \cdot 0$" разрешается через предел

$$\lim_{n \to \infty} n \operatorname{tg} \pi/n = \pi .$$

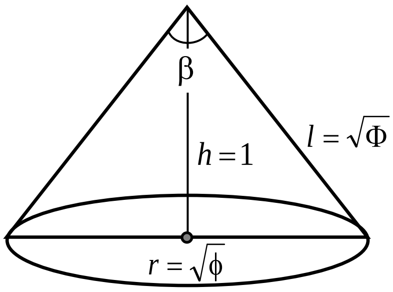
Апофема золотой пирамиды дает нам минимальное расстояние, чтобы по наклонной плоскости-грани, касающейся вписанного шара, добраться до её вершины.

Своего рода противопоставление фразеологизму «скатиться по наклонной плоскости».

Четырехугольная золотая пирамида Кеплера с хорошей точностью воссоздает геометрию знаменитой египетской пирамиды Хеопса.

Золотой конус

Вырежем из круга радиусом $\sqrt{\Phi}$ золотой угол [6] – меньший из двух центральных углов, образованных делением длины окружности согласно золотой пропорции: длина окружности относится к длине её большей части, как она – к меньшей.



Из большей части с длиной дуги $2\pi\sqrt{\phi}$ свернем "золотой конус" [5].

Радиус исходного круга становится образующей конуса *l*.

Радиус основания конуса равен $\sqrt{\phi}$.

В осевом сечении конуса имеем равнобедренный треугольник, состоящий из двух золотых треугольников Кеплера $(r,\ h,\ l) = \left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right)$.

Угол раствора образованного конуса (между двумя противоположными образующими) равен

$$\beta = 2\arccos\sqrt{\phi} \approx 76{,}35^{\circ} .$$

Телесный угол при вершине прямого кругового конуса определяется формулой

$$\Omega \ = \ 2\pi\,(1 - \cos\,\beta/2) \ = \ 2\pi\left(1 - \sqrt{\phi}\right) \ \approx \ 77{,}0^{\circ} .$$

В этих формулах величина $\sqrt{\phi}$ – обычное число, без метрики.

Что в целом примечательно? – Помимо разнообразных неординарных свойств золотого треугольника Кеплера и/или описанной выше особенности образующей конуса.

Вследствие трансцендентного характера длины окружности, обусловленного наличием числа π, золотой угол [6] нельзя вычертить обычными геометрическими построениями с помощью циркуля и линейки.

В то же время, как видим, наличествует связь, пусть и опосредованная, между золотым углом и параметрами золотого конуса и золотого треугольника Кеплера.

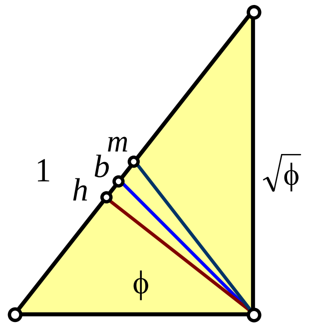
Об одном свойстве треугольника Кеплера

Примечательно, что в треугольнике Кеплера три линии (медиана, биссектриса и высота), проведенные через вершину прямого угла, делят гипотенузу на два отрезка в таких отношениях (рис. 3):

- медиана m – 1;
- биссектриса b – $\sqrt{\Phi} \approx 1{,}272$;
- высота h – $\Phi \approx 1{,}618$.

Эти отношения де-факто повторяют взаимосвязь сторон данного треугольника [7, 8]

$$\left(1:\sqrt{\phi}:\phi\right) \equiv \left(\Phi:\sqrt{\Phi}:1\right) \approx 1{,}272\,.$$



$$(h,\ b,\ m)=\left(\phi^2,\ \frac{1}{1+\sqrt{\Phi}},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{m}{1-m},\ \frac{b}{1-b},\ \frac{h}{1-h}\right)=\left(1,\ \sqrt{\phi},\ \phi\right)$$

Рис. 3. Отношение частей гипотенузы в треугольнике Кеплера
для высоты h, биссектрисы b и медианы m

Треугольник Кеплера прекрасно демонстрирует связь золотого сечения с членением целого надвое.

Имеем обусловленную закономерность перехода от деления стороны пополам (медиана) к делению угла пополам (биссектриса) и далее к перпендикуляру (высота) с формированием золотого сечения на гипотенузе.

Практический след

В заключение статьи [1] отмечается:

«Таким образом, золотое сечение проявляет важное практическое свойство: минимизация расстояния при перемещении *вдоль него* грузов неизбежно приводит к экономии затрат времени и силы, а, следовательно, и работы. При этом если речь идет о перемещениях по наклонной плоскости или прямой, опирающейся на шар, то плоскость или прямую следует наклонить под *углом золотого сечения*» (курсив наш – *С.Л.*)».

Сначала уточним детали…

Про "угол золотого сечения" мы уже говорили. Такого угла нет.

Понятие "вдоль" или "поперек" золотого сечения также не считается правильным.

Хотя сама мысль автора в целом понятна.

Что касается экономии работы, то вопрос неоднозначный.

Затраченная энергия на подъем груза массой m главным образом определяется высотой h и соответствующим изменением потенциальной энергии mgh. Особенно при незначительном коэффициенте трения скольжения.

При этом большой наклон плоскости с углом $\alpha=\arccos\phi\approx 52^{\circ}$, не является удобным. Например, чтобы катить тележку.

Однако в условиях преодоления больших трений геометрия золотых пирамид Кеплера может оказаться весьма полезной.

Возможно, именно этот момент, вкупе с другими замечательными математическими свойствами четырехугольной золотой пирамиды Кеплера, сыграл определенную роль при выборе пропорций некоторых египетских пирамид.

Или как вариант, – дает наикратчайший путь к вершине социальной пирамиды. Остается наклонить лестницу под правильным углом.

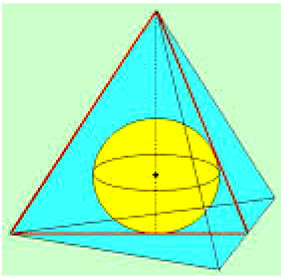
Несмотря на некоторые моменты сбивчивости при изложении статьи [1], выражаем наше одобрение В. Соловьеву за новаторские подходы с пожеланием продолжить исследования в области изучения и применения золотой пропорции.

Omnis qui quaerit invenit…

Литература:

1. Соловьев В.Г. Теорема о золотом сечении. Практический смысл // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22481, 07.09.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321312.htm.
2. Шелаев А.Н. К установлению причин различия геометрических и физических параметров великих пирамид // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.21962, 07.04.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162922.htm.
3. Узнать ещё / Комбинации геометрических тел / Шар, вписанный в пирамиду. – URL: uznateshe.ru/shar-vpisannyiy-v-piramidu/.
4. Василенко С.Л. Золотоносные треугольники на евклидовой плоскости // Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 15.10.2012. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12293.html.
5. Василенко С.Л. Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html.
6. Golden angle // Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle.
7. Василенко С.Л. Перекрестные отношения и гармоничность в структурировании объектов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22151, 03.06.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162966.htm.
8. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22385, 05.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.

Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html