Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Представлено достаточно полное описание треугольника Кеплера, который объединяет в себе два "сокровища геометрии": теорему Пифагора и золотое сечение. Показано, что так называемый "мета-треугольник" является одной из бесконечных реализаций треугольника Кеплера с единичной мерой его высоты. Многие приписываемые ему свойства (трансцендентности, фрактальности, самоподобия, сакральности и др.) таковыми не являются и по своему характеру напоминают мифы.

Оглавление

Если бы треугольники создали себе бога,
он был бы с тремя сторонами.
Ш. Монтескьё

Введение

Треугольник – первая геометрическая фигура, встречающаяся в древних орнаментах.

Изображения треугольников и соответствующие задачи на построение находят в папирусах и старинных индийских книгах.

Треугольник – одна из первых плоских фигур. Отсюда и символ поверхности вообще.

В дошедших до нас трактатах древнегреческого философа Платона «всякая прямолинейная поверхность состоит из треугольников» [1] – строительных блоков космического мироздания. Но не все из них одинаково выразительны, и «нам приходится отдать предпочтение двум треугольникам... один из них равнобедренный, а другой таков, что в нем квадрат большей стороны в три раза больше квадрата меньшей» [1, с. 457].

В диалоге "Тимей" отмечается, что истинными элементами материального мира являются не земля, воздух, огонь и вода, но два вида прямоугольных треугольников: половина квадрата и половина равностороннего треугольника.

В такой абстрактной науке как математика выделен специальный раздел тригонометрии (греч. *trigonon* треугольник + *metro* метрия), который своим рождением обязан исследованию зависимостей между сторонами и углами треугольника, а сегодня изучает алгебраические соотношения тригонометрических функций и их приложения в геометрии.

Наибольший вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX–XX веков Лемуан, Брокар, Тебо и другие.

На сегодня мы имеем целый кладезь уникальных свойств, которые можно по праву отнести к проявлению редкостной алгебраически-геометрической симметрии.

Просто диву даешься, насколько многообразен и удивителен мир гармонично-симметричных отношений в общесистемном случае для любого треугольника, по внешней форме весьма далекого от гармонии в смысле её частного образа красивости [2].

Насколько всё сразу преображается, когда мы начинаем сопоставлять отношения сторон, углов, высот и прочих элементов треугольника, которые образуют около 3600(!) характерных точек [3–5] со своей геометрией, симметрией и гармоничными соотношениями.

Треугольник подобно фениксу из пепла воссоздается во всей своей красе, как геометрической, так и формульно-подобной, а часто даже симметричной форме [6].

Тем неожиданной стала полемика в отдельных последних публикациях по золотоносной тематике вокруг известного треугольника Кеплера.

Он стал своеобразной "притчей во языцех" с синхронным порождением современных мифов математического характера.

Одновременно вполне понятный геометрический объект превратился в камень преткновения и/или "яблоко раздора" позиций-взглядов.

С одной стороны, несмотря на свою 4-вековую известность [7, с. 149], он продолжает как бы переоткрываться (*rediscover*) или "переоопределяться".

С другой стороны, отличаясь изящной простотой, он, как вдруг оказалось, способен вызывать недопонимание или, по аналогии с тремя сторонами геометрической фигуры, – блуждание в трех соснах.

Начальные сведения

Треугольник Кеплера (далее по тексту Δ-Кеплера) – это прямоугольный треугольник, длины сторон которого составляют геометрическую прогрессию.

Данная фигура объединяет два важных математических признака:

- прямой угол с вытекающей теоремой Пифагора;
- геометрическая прогрессия или пропорциональность сторон: большая сторона так относится к средней, как она к меньшей.

Пропорциональность сторон вкупе с прямоугольностью приводит к тому, что знаменатель геометрической прогрессии для численных значений сторон равен квадратному корню из константы золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$ [8, с. 80–90].

Квадраты, построенные на сторонах Δ-Кеплера, образуют геометрическую прогрессию с соотношением $1:\Phi:\Phi^2$.

Для вещественных положительных чисел u, $v > 0$ их среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое являются длинами сторон прямоугольного треугольника тогда и только тогда, когда фигура является Δ-Кеплера [9].

Миф 1. Кеплер определил термин "золотое сечение"

Проблематика золотого сечения (ЗС) достаточно обстоятельно раскрыта в докторской диссертации В. Зубова «Архитектурная теория Альберти» (1946).

Данную тему "реставрировал" В. Белянин (РФ, Москва) – педантичный приверженец историзма в области математики и наш соавтор по ряду совместных статей.

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина «золотое сечение», В. Зубов приводит оригинальный текст высказывания выдающегося немецкого астронома-математика Кеплера [10, 11]:

«*Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит*». – Kepler J. Mysterium Cosmographicum, 1596.

Далее читаем: «*Этот малоизвестный и, насколько я знаю, не переводившийся на русский язык текст важен во многих отношениях. Он не только с очевидностью показывает, что термин "золотое сечение" не принадлежит Кеплеру и что, по Кеплеру, "золотое сечение" следовало бы, скорее, назвать "алмазным"*».

Между тем, в публикациях по ЗС и гармонии обычно приводится изрядно затасканная и ложная "цитата", причем без какой-либо ссылки на источник: «*В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем*». – В искаженной интерпретации некоего американского математика.

Например, крупнейший геометр 20 века Г. Коксетер тоже дает несколько вольное изложение Кеплера [12, с. 236]. Но делает это весьма корректно: без прямого цитирования и со ссылкой на источник, – Kepler J. Gesammelte Werke, Munchen: C.H. Beck, 1938.

Получается, что до сих пор, кроме В. Зубова, многие авторы, взывая к приверженности историческим линиям, де-факто не удосужились заглянуть в первоисточники.

В итоге перекроенная фраза Кеплера стала со временем такой же нелепостью, как и утверждение, что термин "золотое сечение" придумал то ли Птолемей, то ли Леонардо да Винчи. Действительно, «многие современные книги на тему золотого сечения пестрят произвольными умозрительными допущениями и не имеют никакого отношения к науке, разве что близки к жанру научно-фантастической журналистики» (В. Белянин).

Надо сказать, исследователи ЗС в своем заблуждении не одиноки: «Такое деление (точкой *C*) Пифагор называл *золотым делением*, или *золотой пропорцией,* а Леонардо да Винчи – общепринятым сейчас термином *золотое сечение*» [13, с. 12]. – Это "откровение" писал доктор философских наук Ю. Урманцев, – следует признать, известный ученый в своей области – общей теории систем. Только вот знание истории, к сожалению, подкачало.

Сегодня точно известно, что «термин "золотое сечение" вошел в употребление лишь в девятнадцатом веке» [14, гл. 23]. Первое терминологическое упоминание *goldener schnitt* соотносится с немецким математиком Мартином Омом (1835) – братом физика Г. Ома.

В 1875 г. данное словообразование впервые появляется в восьмом (!) издании Британники – наиболее полная и старейшая универсальная энциклопедия на английском языке (печатается с 1771 г.), хотя в предыдущих семи его нет.

В 1906 г. публикуется перевод книги другого немецкого математика А. Шустера [15], где в разделе «Квадратный корень» говорится: «*Решенная выше задача называется задачей о "золотом сечении" (sectio aurea)*».

Именно с этой книги или других близких по времени работ термин "золотое сечение" утверждается в русской литературе.

Итак, у Кеплера отсутствуют словосочетания «теорема Пифагора» и «золотая пропорция», как сегодня цитируют все кому не лень.

Более того, с золотом сравнивается именно соотношение квадратов сторон прямоугольного треугольника, а пропорциональное сечение – с драгоценным камнем.

По логике знаменитого астронома-математика, вместо терминологически-описательного золотого должно было стать, например, бриллиантовое или алмазное сечение.

Но, как говорится, история – свершившийся факт, и она не терпит сослагательного наклонения.

Тем более в математике, где подобное происходит очень часто.

Безусловно, допускается свободное изложение вышеприведенного высказывания.

Но тогда его не нужно брать в кавычки, необоснованно приписывая Кеплеру как конкретную цитату.

Геометрическая прогрессия сторон в треугольнике

Треугольник Кеплера непосредственно связан с геометрической прогрессией сторон. Поэтому есть смысл на этом остановиться несколько подробнее. Сначала в общем виде.

В евклидовой геометрии известно основное неравенство треугольника: сумма длин двух сторон не меньше длины третьей стороны. Строгое неравенство достигается для невырожденного треугольника, когда три его вершины не находятся на одной прямой линии.

Доказательство изложено ещё Евклидом [16, с. 32] в предложении 1.20.

Практическое использование неравенства треугольника приводит к любопытным моментам проявления золотого сечения [17].

Пусть стороны треугольника находятся в геометрической прогрессии: $z,\ zq,\ zq^2$ с соответствующими неравенствами:

$$\begin{cases} 0 < z < zq + zq^2, \\ 0 < zq < z + zq^2, \\ 0 < zq^2 < z + zq. \end{cases}$$

Первое неравенство эквивалентно $q^2 + q - 1 > 0$, то есть $q > \phi = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$ – малая золотая константа.

Из третьего неравенства $q^2 - q - 1 > 0$ следует, что $q < \Phi = \left(\sqrt{5} + 1\right)/2$ – большая золотая константа.

Окончательно имеем $\phi < q < \Phi = 1 + \phi$.

Итак, стороны треугольника могут находиться в геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии q ограничен малой и большой константами золотой пропорции.

То есть, находится в интервале $(\phi,\ 1+\phi)$.

В частности, если выбрать $q = \sqrt{\Phi}$, то формируется прямоугольный треугольник Кеплера с соотношением сторон $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$ и тождеством $1 + \Phi = \Phi^2$ по теореме Пифагора.

Заметим, когда длины сторон треугольников составляют геометрическую прогрессию $\left(z,\ zq,\ zq^2\right)$, то логарифмы сторон образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, взяв логарифмы, получаем: $\ln z + 0,\ \ln z + \ln q,\ \ln z + 2\ln q$.

Если стороны треугольника формируют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^{-1}.

В самом деле, исходя из формулы для площади треугольника (как половина произведения стороны на высоту, проведенную на эту сторону), получаем

$$(h_1,\ h_2,\ h_3) = \frac{2S}{z}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Из другой формулы для площади (половина произведения сторон на синус угла между ними) следует, что синусы углов также образуют геометрическую прогрессию.

$$(\sin\gamma,\ \sin\beta,\ \sin\alpha) = \frac{2S}{z^2 q}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Общие положения

По образному сравнению Кеплера теорема о пропорциональном (золотом) сечении прекрасна, но без теоремы Пифагора «ничего не стоит».

Не будем столь категоричны.

Ибо золотая пропорция, в отличие от геометрических закономерностей в прямоугольном треугольнике, имеет более широкое толкование, выходящее далеко за пределы планиметрии [18].

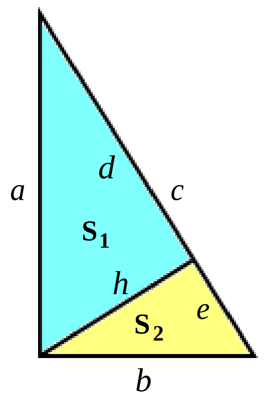
Это к слову...

Напротив, нас интересует единение этих замечательных математических структур [19].

Сначала отметим одну яркую особенность любого прямоугольного треугольника.

Высота, проведенная из прямого угла к гипотенузе, обладает уникальными свойствами. Она делит треугольник на два треугольника, подобных исходному и друг другу.

Из этого вытекают полезные отношения:



- высота h – среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы

$$h = \sqrt{de}\,;$$

- каждый катет треугольника – среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов

$$a = \sqrt{cd}\,, \qquad b = \sqrt{ce}\,;$$

- далее следуют дополнительные соотношения

$$h = \frac{ab}{c}\,, \qquad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\,.$$

В прямоугольном треугольнике Кеплера стороны наделяются дополнительными связями за счет перевода базового золотого соотношения $\Phi^2 = \Phi + 1$ на язык теоремы Пифагора $\Phi^2 = \left(\sqrt{\Phi}\right)^2 + 1^2$ с образующими сторонами $\Phi : \sqrt{\Phi} : 1$.

При этом гипотенуза и меньший катет находятся в золотом отношении.

Кроме того, высота h делит гипотенузу золотым сечением

$$\frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \Phi\,.$$

Примечательно, что площади трех треугольников (основного и составных) также соотнесены в золотой пропорции.

Действительно,

$$\frac{c}{d}=\frac{d}{e} \quad \to \quad \frac{ab\cdot c}{ab\cdot d}=\frac{d}{e} \quad \to \quad \frac{ab}{hd}=\frac{hd}{he} \quad \to \quad \frac{S_1+S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S_2} = \Phi .$$

Золотое отношение площадей более выразительно, чем геометрическая прогрессия сторон со знаменателем $\sqrt{\Phi}$, который не имеет четкого толкования. Разве что точка пересечения двух гипербол: равнобочной $xy=1$ и канонической $x^2-y^2=1$ (рис. 1).

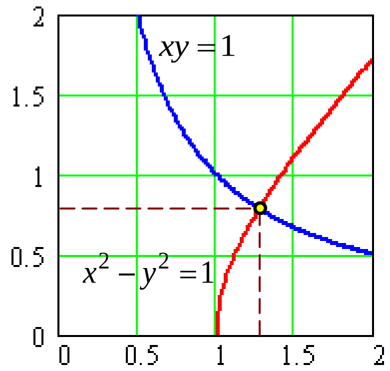


Рис. 1. Пересечение гипербол в точке $\left(\sqrt{\Phi}, \sqrt{\phi}\right)$

Треугольник Кеплера строится сравнительно просто [20].
Сторона единичного квадрата 1×1 делится пополам (рис. 2).

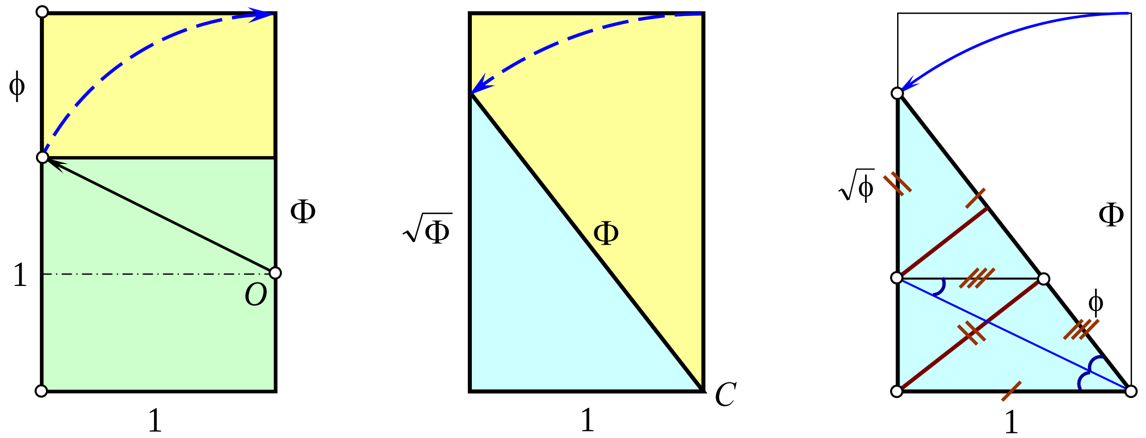


Рис. 2. Построение треугольника Кеплера и проведение в нем характерных линий

Из точки деления O проводится дуга, отсекая на продолжении стороны величину Φ.

Этим раствором циркуля чертится другая дуга (с центром C) до пересечения с продолжением противоположной стороны квадрата.

В результате такого построения стороны треугольника соотносятся в геометрической прогрессии $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

Таким образом, треугольник Кеплера – это прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:a=a:b$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию $b:a:c=1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

Что касается треугольников общего вида (не обязательно прямоугольных) со свойством геометрической пропорции $c:a=a:b$ для сторон, то таких фигур существует великое множество, образуя любопытную резольвенту Вассера [21, 22].

Представляет также интерес круговая модель золотого отношения для отрезков ломаной линии с переменной длиной [23].

С единственной поправкой, что речь де-факто идет не о множестве разных "золотых сечений", которое в математике одно и равно Ф, а его конкретных проявлениях для разных конфигураций сопряженных отрезков на плоскости.

Что, конечно, не одно и то же.

"Второе ЗС" в треугольнике Кеплера

В работе В. Лавруса [24] приведено так называемое «второе золотое сечение».

В его основе лежит построение прямоугольного треугольника на базе обычного ЗС на единичном отрезке и последующее деление прямого угла пополам. Фактически образуется треугольник Кеплера с соотношением сторон $1:\sqrt{\phi}:\phi\ \approx\ 1{,}272$ (рис. 3).

Биссектриса треугольника делит третью сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Следовательно, имеем

$$\frac{\sqrt{\phi}}{1-x}=\frac{\phi}{x}\quad\rightarrow\quad x\ =\ \frac{1}{1+\sqrt{\Phi}}\ \approx\ 0{,}440;\quad 1-x=\frac{1}{1+\sqrt{\phi}}\approx 0{,}560\,.$$

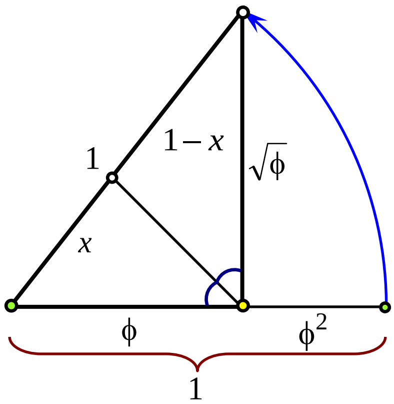


Рис. 3. Построение треугольника Кеплера
с последующим делением прямого угла пополам

Отношение сопряженных отрезков равно

$$\frac{1-x}{x}\ =\ x^{-1}-1\ =\ \sqrt{\Phi}\ \approx\ 1{,}272\,.$$

Таким образом, объект, который назван «вторым золотым сечением», фактически является основанием геометрической пропорции сторон Кеплера с её продолжением на отрезках гипотенузы в том же отношении [25].

Применение такой терминологии – дело вкуса и предпочтений.

Однако, на наш взгляд, это излишне. Любая целочисленная степень константы, а также корень квадратный из неё в определенной степени уже несут в себе "печать" ЗС.

В рассмотренном примере для нас главным был подход к построению, содержащий в себе деление пополам. Только не линейной, а угловой мерой.

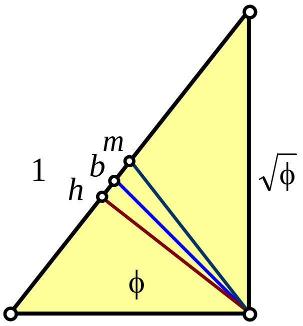
Примечательно, что в треугольнике Кеплера три линии (медиана, биссектриса и высота), проведенные через вершину прямого угла, делят гипотенузу на два отрезка в таких отношениях (рис. 4):

- медиана m – 1;
- биссектриса b – $\sqrt{\Phi} \approx 1{,}272$;
- высота h – $\Phi \approx 1{,}618$.

Данные отношения де-факто повторяют взаимосвязь сторон данного треугольника [19]

$$\left(1 : \sqrt{\phi} : \phi\right) \equiv \left(\Phi : \sqrt{\Phi} : 1\right) \approx 1{,}272 .$$

Треугольник Кеплера прекрасно демонстрирует связь золотого сечения с членением целого надвое.



$$(h,\ b,\ m) = \left(\phi^2,\ \frac{1}{1+\sqrt{\Phi}},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{m}{1-m},\ \frac{b}{1-b},\ \frac{h}{1-h}\right) = \left(1,\ \sqrt{\phi},\ \phi\right)$$

Рис. 4. Отношение частей гипотенузы в треугольнике Кеплера
для высоты h, биссектрисы b и медианы m

Имеем обусловленную закономерность перехода от деления стороны пополам (медиана) к делению угла пополам (биссектриса) и далее к перпендикуляру (высота) с формированием золотого сечения на гипотенузе. Замечательный результат.

А термину "второе ЗС" больше подходит бритва Оккама. За ненадобностью и отсутствием реальной смысловой нагрузки.

Общее и частное в Δ-Кеплера

Прежде всего, внесем ясность в применяемые обозначения:

– запись $(b, a, c) = \left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right)$ означает конкретный (фиксированный) треугольник с жестко заданными сторонами;

– запись $(b : a : c) = \left(1 : \sqrt{\Phi} :\ \Phi\right)$ предполагает пропорциональное отношение сторон с любым коэффициентом масштабирования $k > 0$.

Заметим, в определении Δ-Кеплера нет ни слова о численных значениях сторон.

Имеем только два из трех необходимых и достаточных условий для построения такой фигуры. Это означает, что фактических реализаций существует великое множество.

Для вычерчивания конкретного треугольника нужно принять ещё третье условие.

Дополнительный угол к прямому углу априори задавать уже нельзя.

Остается только фиксация сторон.

Таковым третьим условием может быть, например:

– задание любой стороны, обычно = 1 (без потери общности рассуждений) или другое произвольное вещественное число, в частности π, Φ и др.;

– численное принятие равенства гипотенузы сумме катетов, произведению катетов (что равносильно выбору единичной меры в виде высоты = 1) и.т.п.

Это не столь принципиально, ибо все геометрические фигуры продолжают оставаться треугольником Кеплера.

В частности, в золотоносной тематике можно встретить "мета-Δ" с такими условиями:

1. Треугольник прямоугольный.
2. Длины сторон образую геометрическую прогрессию.
3. Гипотенуза численно равна произведению катетов (или высота h = 1).

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2, \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{b} \quad \to \quad cb = a^2, \\ c = ab. \end{cases}$$

Свойства-особенности треугольника Кеплера

Частное проявление Δ-Кеплера

Система имеет одно решение в положительных числах $(b, a, c) = \left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$.

Первые два условия из трех равенств характеризуют Δ-Кеплера.

Третье условие дает его частное проявление.

Эту частную модификацию один автор именует метатреугольником (сокращенно "мета-Δ") и/или сакральным Δ. Как говорится, на здоровье.

"Мета-Δ" называется даже «третьим сокровищем геометрии». Что, по меньшей мере, выглядит уже излишне высокопарно и, как будет показано ниже, необоснованно.

Вместо третьего равенства $c = ab$, что эквивалентно единичной мере $h = 1$, можно принять любое другое условие, лишь бы система имела решение, например:

$$\begin{array}{lcl}
c = b^2 & \to & (b, a, c) = \left(\Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi},\ \Phi^2\right); \\
a = 1 \text{ или } a = bc & \to & (b, a, c) = \left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right); \\
b = 1 \text{ или } c = a^2 & \to & (b, a, c) = \left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right); \\
c = 1 & \to & (b, a, c) = \left(\phi,\ \sqrt{\phi},\ 1\right); \\
b = ac & \to & (b, a, c) = \left(\phi\sqrt{\phi},\ \phi,\ \sqrt{\phi}\right); \\
c = a^2 + b & \to & (b, a, c) = \left(\phi^2,\ \phi\sqrt{\phi},\ \phi\right); \\
ab = 2 & \to & (b, a, c) = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt[4]{\phi},\ \sqrt[4]{\Phi},\ \sqrt[4]{\Phi^3}\right); \\
ab = 2\Phi^2 & \to & (b, a, c) = \sqrt{2}\cdot\left(\sqrt[4]{\Phi^3},\ \sqrt[4]{\Phi^5},\ \sqrt[4]{\Phi^7}\right).
\end{array}$$

Предпоследняя форма соответствует треугольнику, площадь которого $S = 1$.

В последней форме площади треугольников равны $(S, S_1, S_2) = \left(\Phi^2,\ \Phi,\ 1\right)$.

Довольно оригинален случай, когда квадрат гипотенузы равен одновременно сумме квадратов катетов (по Пифагору) и сумме катетов $c^2 = a^2 + b^2 = a + b$:

$$(b, a, c) = \left(\phi^2 + v,\ \phi + v,\ \sqrt{1 + 2v}\right), \quad v = \phi\sqrt{\phi}.$$

Есть, конечно, и принципиально неприемлемые условия. Треугольник Кеплера содержит два квадратичных условия: $c^2 = a^2 + b^2, cb = a^2$. Подобная третья фиксация с одинаковыми степенями в левой и правой части, типа $a^n = c^{n+m}/b^m$, решения не дает.

Миф 2. Δ-Кеплера – частный случай "мета- Δ"

В публикациях по золоту сечению можно встретить утверждение, что не "сакральный" треугольник (позже переименованный в "мета-Δ") является частным случаем Δ-Кеплера, а Δ-Кеплера является частным случаем "мета-Δ".

По нашему убеждению, данное мнение глубоко ошибочно.

Как показано выше, всё оказывается с точностью до наоборот.

"Мета-Δ" – есть частный случай Δ-Кеплера, с фиксированными сторонами.

В качестве третьего дополнительного условия выступает численное равенство гипотенузы произведению катетов.

Данный признак не хуже и не лучше многих других приемлемых условий.

Тем более что он сводится к заданию всё той же единичной меры, только для высоты, опущенной из прямого угла треугольника.

О фрактальности Δ-Кеплера

Отличительной особенностью "золотого" прямоугольного Δ-Кеплера является ярко выраженная фрактальность [26].

Треугольник Кеплера фрактален в нескольких аспектах (рис. 5):

а) геометрическая фрактальность – отсечение от треугольника частей линиями, параллельными одной из сторон;

б) алгебраическая фрактальность или линейное масштабирование;

в) фрактальное членение путем последовательного опускания высот из прямого угла.

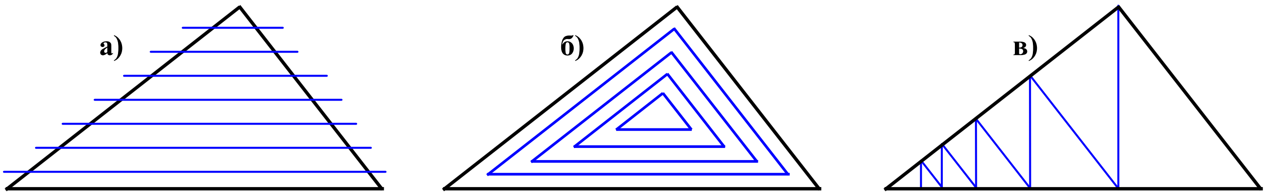


Рис. 5. Примеры фрактальности треугольника Кеплера

Фрактальные свойства Δ-Кеплера, в частности, хорошо прослеживаются, если от каждой боковой стороны опускать перпендикуляры на высоту, а из полученной точки обратно – на боковую сторону (рис. 6).

Рассматривая составные суммы отрезков на гипотенузе и основании треугольника с учетом теоремы Пифагора можно записать такое равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} k^{1+4n}\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^{3+4n}\right)^2 = 1.$$

Выполнив несложные преобразования, приходим к известному суммирующему свойству малой золотой константы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{2n+1} = 1.$$

Миф 3. "Мета-Δ" фрактален и самоподобен

Ещё одно противоречивое суждение, распространяемое в отдельных публикациях по золотому сечению: в Δ-Кеплера и "мета-Δ" отношение сторон численно равно $\sqrt{\Phi}$, что свидетельствует об их фрактальности.

Пропорциональность трех сторон – это вовсе не фрактальность. Фрактальным является объект, повторяющий свои главные свойства-особенности «большого в малом».

Так, любое линейное масштабирование рассмотренных фигур по-прежнему сохраняет прямоугольный треугольник Кеплера с геометрической прогрессией сторон $\sqrt{\phi}$ или $\sqrt{\Phi}$.

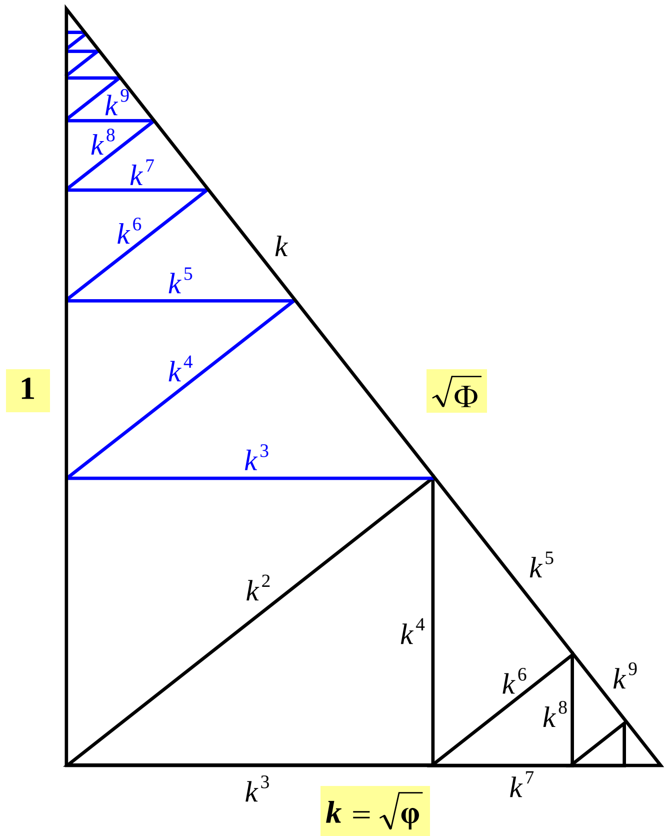


Рис. 6. Фрактальное деление золотого прямоугольного треугольника

Однако для "мета-Δ" последнее условие $c = ab$ или $h = 1$ сразу же нарушается.

Таким образом, фрактален именно Δ-Кеплера, сохраняя прямой угол и свойственную ему пропорциональность сторон.

При обычном своем масштабировании "мета-Δ", «как таковой пропадает», поскольку гипотенуза становится неравной произведению катетов. Значит, это уже не "мета-Δ", а некоторое другое частное проявление Δ-Кеплера.

Масштабирование.

Обычное k-масштабирование "мета-Δ" приводит к нарушению условия о численном равенстве гипотенузы произведению катетов, так как $(ka)\cdot(kb) \neq kc$.

Поэтому фрактальные треугольники, о которых далее говорит автор, перестают быть сакральными. То есть сакральный треугольник не является самоподобным.

В том-то и суть, что "мета-Δ" наделен особым третьим свойством. Применили обычное масштабирование, как в проективной геометрии, и "мета-Δ" рушится-"испаряется".

Поэтому "мета-Δ" с наделяемой ему фрактальностью в принципе не существует, и существовать не может, поскольку не допускает элементарных операций уменьшения-увеличения. То есть он не существует в смысле-контексте заявленной его фрактальности.

Дробление объекта на более мелкие составляющие.

При делении "мета-Δ" высотой на два треугольника, подобных исходному, перестает выполняться равенство гипотенузы произведению катетов: $1 \cdot \sqrt{\Phi} \neq \Phi$, $1 \cdot \sqrt{\phi} \neq \sqrt{\Phi}$ (рис. 7).

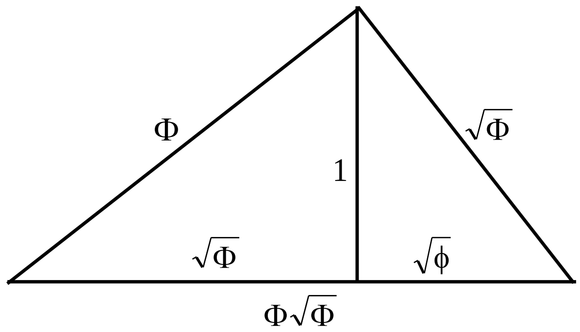


Рис. 7. При элементарном фрактальном развитии "мета-Δ" перестает быть таковым

Таким образом, в реалиях "мета-Δ" есть, но без фрактальных свойств.

Физически "мета-Δ" есть, но как некий из миллиардов кеплеровских треугольников.

Его можно увеличивать в размерах, можно уменьшать. Но при этом нарушается равенство гипотенузы произведению катетов, а значит, он перестает быть "мета-Δ".

Нет у "мета-Δ" и придуманной транцендентности. Ибо корень из золотой константы – есть целое алгебраическое число, как корень многочлена $x^4 - x^2 - 1$ с целыми коэффициентами, из которых старший коэффициент равен единице.

Построение "мета-Δ"

Построению "мета-Δ" его автор уделяет повышенное внимание уже на протяжении доброго десятка лет. Часто с ошибками, неточными пояснениями, утомительными выкладками-представлениями.

При этом непременно подчеркивается содержание некоего «нового научного знания в области числа и геометрии» (?).

На практике всё сводится к простому умножению "золотого тождества" $1 + \Phi = \Phi^2$ на константу Φ и последующему представлению по теореме Пифагора: $\left(\sqrt{\Phi}\right)^2 + \Phi^2 = \left(\Phi\sqrt{\Phi}\right)^2$.

Собственно и весь "мета-Δ".

Без дополнительных общих фраз о сакральной геометрии, трансцендентности, фрактальности и прочего искусственного "обнаучивания" числового тождества.

Дополнительной отличительной особенностью такого треугольника является равенство для численных значений сторон $ab = c$. Подобных связей, как мы видели, существует превеликое множество.

Более того, все они штучно-единичные в своем представлении-построении, и уже при обычном масштабировании теряют свои отличительные способности.

В последнее время будто бы прорисовался приемлемый вариант построения. Хотя всё также с недочетами.

Так, автор сначала подробно и старательно выписывает алгоритм: «делим пополам, …отмечаем точку, … ставим ножку циркуля» и т.п.

Потом неожиданно следует: «проводим касательную линию к окружности».

Но как? – Такой прием с помощью циркуля и линейки в непосредственном исполнении запрещен! Поскольку не известна точка касания, которую ещё нужно найти отдельными построениями. Конечно, в геометрии они известны. Но у автора об этом ни слова, ни ссылок.

Отрезок, соединяющий внешнюю точку *A* с центром окружности *O*, нужно дополнительно разделить пополам и затем как на диаметре провести окружность. Точки пересечения с исходной окружностью дадут искомые точки касания (рис. 8).

Можно ограничиться только одной линейкой. Проводим из точки *A* две линии (рис. 9), и точки пересечения 1, 2, 3, 4 с окружностью соединяем между собой. Через точки пересечения 5, 6 этих соединительных линий проводим прямую, которая при пересечении с исходной окружностью дает искомые точки касания.

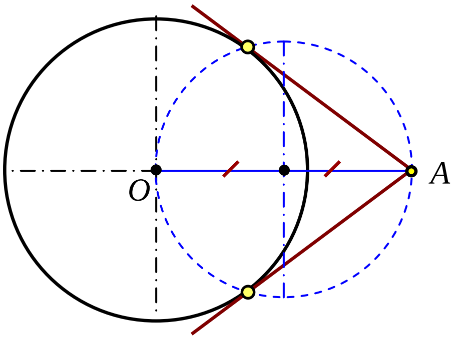


Рис. 8. Построение касательной к окружности (*O*) из внешней точки *A* с помощью циркуля и линейки

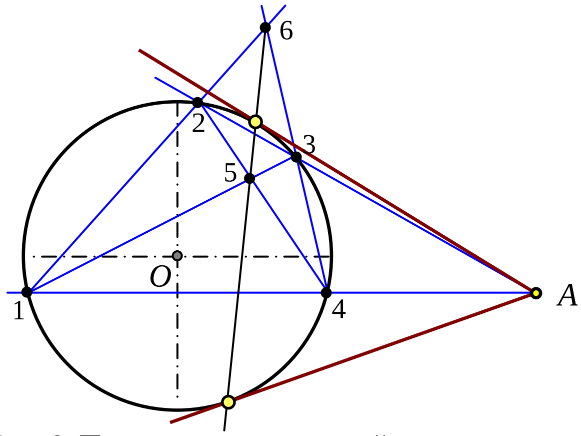


Рис. 9. Построение касательной к окружности (*O*) из внешней точки *A* с помощью линейки

На самом деле построение "мета-Δ" с помощью линейки и циркуля в целом несложное (рис. 10) и сводится к построению двух перпендикулярных отрезков длиной Ф и $\sqrt{\Phi}$:

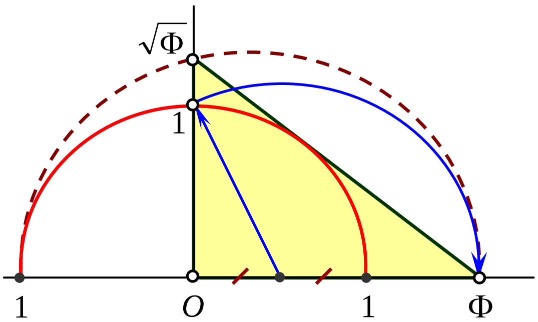


Рис. 10. Построение "мета-Δ" с конкретными сторонами $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$, как частного случая треугольника Кеплера

1) *Вычерчиваем составной отрезок* длиной $\Phi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, для чего проводим красную полуокружность радиусом 1 и синюю дугу с центром в середине радиуса.

2) *Геометрически извлекаем квадратный корень* $\sqrt{\Phi}$, для чего отрезок 1 + Ф делим пополам и как на диаметре строим полуокружность (штриховую), которая отсекает на вертикальной оси (*O*) величину $\sqrt{\Phi} = \sqrt{1 \cdot \Phi}$ – среднее пропорциональное (геометрическое) отрезков 1 и Ф. Соединяем точки Ф и $\sqrt{\Phi}$. Искомый треугольник готов.

Легко реализуются и другие построения. Было бы желание.

Например, можно взять за основу золотое сечение единичного диаметра (рис. 11).

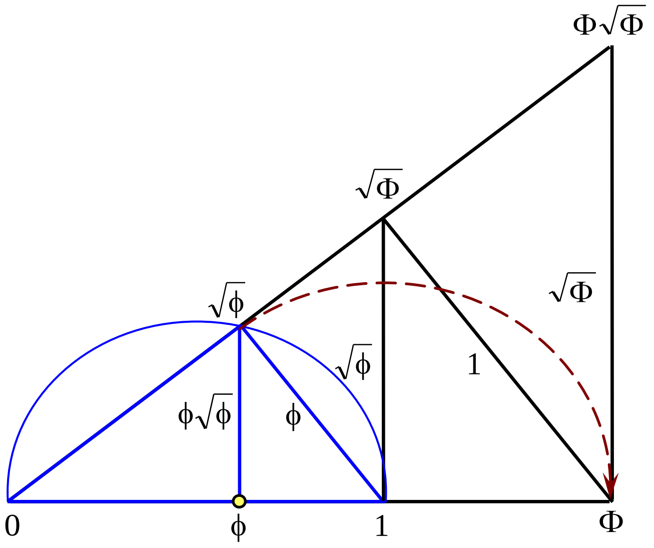


Рис. 11. Построение "мета-Δ" $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$, начиная с меры единичной длины

Далее простыми последовательными построениями перпендикуляров выстраивается цепочка-гирлянда разных реализаций треугольника Кеплера.

Конкретно для "мета-Δ" $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$ можно ещё проще: достаточно провести дугу радиусом ϕ и перпендикуляр из полученной точки Φ.

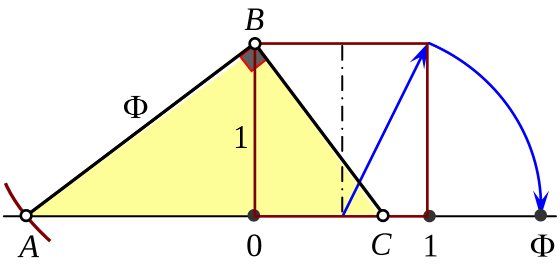
Не это главное. Автор "мета-Δ" не видит или умышленно опускает главный момент.

В любом прямоугольном треугольнике численное произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту $ab = ch$.

Если принять высоту единичной длины, то получится $ab = c$.

Вот и вся премудрость "мета-Δ", в котором единичная метрика присутствует явно в виде высоты $h = 1$, опущенной из прямого угла на гипотенузу (см. рис. 7).

Отсюда непосредственно вытекает ещё одно очевидное построение (рис. 12).



Из середины квадрата 1×1 дугой отмечаем константу Φ.

Из точки B радиусом 0Φ отмечаем точку A.

Проводим перпендикуляр $BC \perp AB$.

Искомый Δ-Кеплера ABC готов.

Рис. 12. Построение "мета-Δ" со сторонами $\left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right)$,
как частного случая треугольника Кеплера с единичной высотой

Закономерный вопрос: ради чего это многолетнее кружение вокруг "мета-Δ"? – Если он не фрактальный, не самоподобный, не трансцендентный, не сакральный.

Никаких ярких отличительных особенностей. Одно свойство $ab = c$, но и оно очевидно для любого прямоугольного треугольника с единичной высотой.

Равный среди равных в необозримом множестве Δ-Кеплера.

Более того, планиметрия не придает особого значения равенству $ab = c$.

Хотя иногда оно появляется самим собой. Например, гипотенуза $c = 2$ и высота $h = 1$ дают прямоугольный равнобедренный треугольник $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$ с указанным свойством.

Но этому никто особого внимания не уделяет. Куда более важна иррациональность $\sqrt{2}$, известная ещё с античных времен.

Сколько копий поломали вокруг этой проблемы великие умы человечества!

Миф 4. "Мета-Δ" математика ранее не знала

На страницах золотоносной тематики можно встретить категоричное утверждение, что «треугольник с параметрами сторон метатреугольника формальная математика ранее не знала». Одновременно автором распространяется тезис: «и метод золотого сечения диаметра и радиуса круга … был предложен мной».

Способ деление золотым сечением любого отрезка известен уже более двух тысячелетий, со времен Евклида

Как было показано выше, "мета-Δ" – частный случай Δ-Кеплера.

Безусловно, наивно искать в математических приложениях все бесконечные частные проявления Δ-Кеплера. Также как и всю конкретику квадратов, кругов, эллипсов и т.п.

Достаточно того, что Кеплер представил понятный четкий алгоритм построения и охарактеризовал свойства своего треугольника.

Он писал[1] своему учителю – профессору Михаэль Мастлину: «Если на линии, которая разделена в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник таким образом, что прямой угол будет находиться на перпендикуляре к точке деления, то меньшая сторона <треугольника> будет равняться большему сегменту разделенной линии» [7, с. 149].

Построение любых прямоугольных треугольников на диаметре окружности очевидно из предложения 31 Евклида: «В круге угол, заключенный в полукруге, – прямой» [16, с. 110].

Куда ещё проще? – Некоторый отрезок-диаметр делится на две составные части в золотом отношении (по Евклиду), затем из точки деления восстанавливается перпендикуляр к окружности.

Полученный треугольник Кеплера можно далее как угодно масштабировать, в том числе для получения конкретных частных реализаций с априори задаваемыми условиями.

Вместо заключения

Треугольник Кеплера в своих проявлениях имеет бесконечное множество вариаций.

Их различие заключается только в конкретных числовых значениях сторон, высот, площадей.

Без потери общности рассуждений, один из таких параметров обычно приравнивается единице, образуя соответствующую метрику.

Вся премудрость так называемого "мета-Δ" состоит в единичной мере высоты $h = 1$, опущенной из прямого угла на гипотенузу, на евклидовой плоскости.

Две высоты в прямоугольном треугольнике уже есть, в виде катетов, а это будет третья.

Как известно, в любом прямоугольном треугольнике численное произведение катетов равно произведению гипотенузы на высоту $ab = ch$.

---

[1] «If on a line which is divided in extreme and mean ratio one constructs a right angled triangle, such that the right angle is on the perpendicular put at the section point, then the smaller leg will equal the larger segment of the divided line». – URL: moscowbooks.ru/pod/book.asp?id=459959.

Приняв $h=1$, получаем $ab=c$. Вот и весь кроссворд с "мета-Δ", в котором единичная евклидова метрика присутствует в явно виде, как единичная высота. Несмотря на высокопарность слога с приставкой "мета", предполагающей обобщение, и противоречивое утверждение, что "мета-Δ" «не вписывается в числовые меры стандартов существующей формальной математики». – "Вписывается", и очень даже хорошо!

На евклидовой плоскости существует бесконечное множество Δ-Кеплера в его фрактальных фиксированных проявлениях: от бесконечно малых до бесконечно больших форм. В этом безбрежном океане треугольных модификаций лишь один-единственный вариант – так называемый "мета-Δ" – имеет единичную высоту, в качестве числовой меры.

Согласно «теореме о бесконечных обезьянах», берущей начало с трудов Аристотеля и Цицерона, вычерчивая различные реализации треугольника Кеплера, мы рано или поздно выйдем и на "мета-Δ". То есть вероятность данного события стремится к единице при стремлении времени к бесконечности.

Строить обобщающие выводы на базе этого частного проявления, по меньшей мере, не разумно. Равно как и сочинять на этом поприще современные мифы, которые за своей необоснованностью и ненадобностью подпадают под бритву Оккама.

Без тени сомнения и сожаления… That's all.

Список источников:

1. Платон. Тимей. / Собр. соч. в 4-х т. Т 3. – М.: Мысль, 1994. – С. 432–498.
2. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.
3. Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers (ETC). – Last update: 04.03.2010. – URL: faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia.
4. Kimberling C. Triangle Centers and Central Triangles // Congr. Numer. – 1998. – 129. – P. 1–295.
5. Weisstein E.W. Triangle Center // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/TriangleCenter.html.
6. Успенский В.А. Треугольник Паскаля: 2-изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 48 с.
7. Livio Mario. The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 292 p.
8. Herz-Fischler R. The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 293 p.
9. Domenico A. The golden ratio – the right triangle – and the arithmetic, geometric, and harmonic means // The Mathematical Gazette, 89, 2005.
10. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.
11. Василенко С.Л. Золотоносная атрофия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22282, 14.07.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162993.htm.
12. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
13. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии (Философские и естественнонаучные аспекты) – М.: Мысль, 1974. – 132 с. – URL: sci.aha.ru/ots/OTS_Simmetry.pdf.
14. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – 2-е изд., испр. и доп. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 447 с.
15. Шустер А. Популярные лекции низшей и высшей математики. – С.-Петербург: «Вестник Знания» (В.В. Битнера), 1906. – 130 с.

16. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

17. Василенко С.Л. Пропорции в "симбиозе" золотоносных и гармоничных треугольников // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=95&sm=2.

18. Мелешко С.В., Беляева Е.Д., Куксова Е.В. Золотое сечение в математике и других областях // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 6. – С. 78–79. – URL: rae.ru/snt/pdf/2013/6/69.pdf.

19. Василенко С.Л. Перекрестные отношения и гармоничность в структурировании объектов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22151, 03.06.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162966.htm.

20. Василенко С.Л. Гармоничное структурирование во внешней среде // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16198, 05.12.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02021140.htm.

21. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

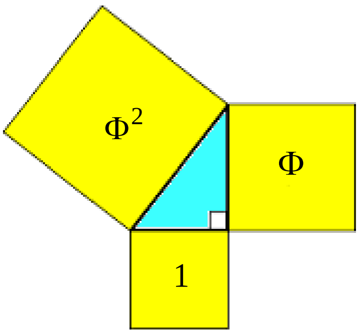
22. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

23. Шелаев А.Н. Обобщенная геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162995.htm.

24. Лаврус В.С. Золотое сечение // Электронная б-ка «Наука и техника». – 1997. – URL: n-t.ru/tp/iz/zs.htm.

25. Василенко С.Л. Естественные тела биосферы: симбиоз золотого сечения и деления пополам // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22192, 13.06.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162975.htm.

26. Василенко С.Л. Золотоносные жилы в планиметрии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16086, 25.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161705.htm.



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

P.S. *или З.І. по-украински.*
Чтобы не вставать во второй раз…
"ВаСиЛенко" – авторский логотип.
Прописные буквы соответствуют ФИО – Василенко Сергей Леонидович.
Понятный и по-своему самобытный образ.