Золотая гармония
системы числовых последовательностей

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Представлены модели и алгоритмы формирования множества связанных числовых последовательностей, обладающих замечательными свойствами на основе константы золотого сечения Ф. Все числовые ряды имеют одинаковый аттрактор (предельное отношение рядом стоящих элементов), равный $a + b\Phi$. Кроме того, отношения соседних рядов также стремятся к числу Ф, подобно числам Фибоначчи. Показана бесперспективность умозрительных допущений-спекуляций вокруг золотоносной темы.

Доверяй, но проверяй…

Оглавление

Введение

Несмотря на обилие публикаций о золотом сечении (ЗС), к сожалению, многие из них часто изобилуют откровенными ляпами.

Чего стоит только знаменитое сравнение Кеплером теоремы Пифагора и пропорционального сечения соответственно с куском золота и драгоценным камнем [1].

Цитата кочует практически по всем литературным источникам, однако, в искаженной интерпретации некоего американского математика, о чем подробно изложено в работе [2].

Похожие погрешности касаются и самого термина «золотого сечения» (*goldener Schnitt*), который ввел в 1835 г. немецкий математик Мартин Ом. Хотя кому только не приписывают данный термин с переменным упоминанием: Евклида и Платона, Кеплера и Леонардо да Винчи, Пачоли и др.

Произвольные умозрительные допущения имеют отдаленное отношение к науке и по образному сравнению А. Чернова больше напоминают «золотой лохотрон», нежели исторические линии, например:

– «Термин "золотое сечение" (aurea sectio) идет от Клавдия Птолемея, который дал это название числу 0,618 (?)… Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал». – Э. Сороко, «Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем»;

– «Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно Леонардо да Винчи был одним из первых, кто ввел сам термин "золотое сечение" (?)». – А. Стахов, «Код да Винчи и ряды Фибоначчи».

Подобные фантазии черпаются из последовательно-перекрестных ссылок Интернета. Однако не имеют реальной подосновы, претендуя де-факто на искусственное украшение собственных творений старинным налетом таинственности и/или античной мудрости, нежели на воспроизведение исторической точности.

Создается ореол-впечатление, якобы эти работы питаются соками-корнями древности, под соусом-прикрытием которых исподволь "протаскиваются" произвольные вздорные интерпретации: множество золотых констант и т.п.

Подобное относится к знаменитой иллюстрации Леонардо к Витрувианскому человеку, в которой золотого сечения попросту нет [3]!

Человеческий пупок расположен не на высоте золотого сечения $h:1.62$, а на расстоянии, полученном из логики членения квадрата, $h:1{,}64$.

Разница вроде и небольшая. Но чрезвычайно принципиальная. Тем более, когда речь идет об идеальной математической константе золотого сечения.

Все эти "приблизмы" – околонаучная мифология. Из серии «вокруг да около».

Приобщение к старине, по замыслу авторов, должно символизировать величие и основательность материала, навевая одновременно марево колдовской таинственности.

Золотая стезя

Наша цель: получение результатов исследовательской работы, имеющих абсолютную точность и высокую надежность на предмет сопоставления с константой золотого сечения.

Их не нужно принимать на веру. Как изложение истории либо религиозных догматов.

Или как говорят англичане, «to take nothing for granted» – ничего не принимать на веру. Особенно в такой высокоточной идеальной конструкции, каковой является золотая пропорция.

Безупречность решений и выводов не должна вызывать ни толики сомнений.

Конечно, остается место для предположений-гипотез и даже свободных размышлений. Но если об этом четко сказано. Либо очевидным образом следует из духа-контекста повествования.

Постановка задачи

В работах [4; 5, гл.24; 6] описана любопытная модель формирования взаимосвязанной пары числовых рекуррентных последовательностей с особыми свойствами.

Модель построена на основе системы из двух взаимоувязанных разностных (возвратных) уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n, \\ q_{n+1} = p_n + q_n, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n, \\ q_{n+1} = p_n + q_n. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для заданных начальных условий $\{p_1, q_1\} \neq 0$ рекурсии генерируют числовые последовательности, предельное отношение которых p_n/q_n равно соответственно константе золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и квадратному корню $\sqrt{2}$.

Замена во второй системе двойки любым положительным числом α приводит к величине $\sqrt{\alpha}$.

Частное значение $\alpha = 5$ дает квадратный корень из пяти $\sqrt{5} = \Phi + \Phi^{-1}$.

Описанная система уравнений нашла дальнейшее развитие-обобщение в работах [6, 7].

В частности, получены расширенные структуры для константы золотого сечения: модель парно-золотых рекурсий, модели четных и нечетных степеней ЗС и др.

Что касается большего количества $k \geq 3$ связанных последовательностей, то, вероятно, данная задача могла попасть ранее в поле зрения других авторов.

Однако разыскивать её в океане многочисленных математических изданий весьма затруднительно. Тем более что мы хотим вычленить здесь лишь феномен ЗС.

В таком ракурсе-разрезе материал показался нам интересным и вполне самостоятельным.

Представляется, здесь главное – конечный результат, а не пути следования, как часто в обиходе называют наши дороги.

Поэтому уделим внимание собственным исследованиям. А именно: математической гармонии множества взаимосвязанных последовательностей, основанных на константе золотого сечения.

Аналитика двух связанных последовательностей

Сначала проследим некоторые закономерности на примере двух числовых рядов.

В общем виде взаимозависимые числовые последовательности представим линейной взвешенной комбинацией предшествующих значений

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_1 p_n + a_2 q_n, \\ q_{n+1} = b_1 p_n + b_2 q_n, \end{cases}$$

где $\{\, a_1, a_2, b_1, b_2 \,\}$ – вещественные коэффициенты, не равные одновременно нулю; n – индексы-числа натурального ряда; $\{p_1, q_1\}$ – ненулевые начальные значения.

Определим условия, при которых обеспечивается сходимость предельного отношения $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{p_n}{q_n}$ двух одномоментных элементов числовых рядов.

Очевидно

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_1 p_n + a_2 q_n}{b_1 p_n + b_2 q_n} = \frac{a_1 \cdot p_n / q_n + a_2}{b_1 \cdot p_n / q_n + b_2}.$$

В пределе получаем

$$x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} \quad \text{или} \quad x = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2}.$$

Отсюда следует квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{a_1 - b_2}{b_1} x - \frac{a_2}{b_1} = 0$$

с положительным корнем

$$\lambda = \frac{a_1 - b_2}{2b_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1}}.$$

В зависимости от соотношения параметров $\{ a_1, a_2, b_1, b_2 \}$ можно сформировать числовые ряды с априори заданными свойствами.

К примеру, если положить $b_2 = a_1 - b_1 > 0$ и $a_2 = b_1$, то образуется квадратное уравнение золотого сечения $x^2 - x - 1 = 0$.

Таким образом, четверка параметров

$$V = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 - b_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

приводит к константе золотого сечения Φ, если $a_1 > b_1$.

Так мы приходим к паре "золотоносных" рекурсий с произвольными коэффициентами $\{ a_1, \ b_1 \}$

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_1 p_n + b_1 q_n, \\ q_{n+1} = b_1 p_n + (a_1 - b_1) q_n. \end{cases}$$

<u>Аттрактор</u>, как предел отношения соседних элементов для обоих числовых рядов, равен

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_1 - b_1 + b_1\Phi = a_1 + b_1\phi.$$

Проследим свойства взаимосвязанных последовательностей на конкретных примерах, приняв для определенности начальные условия $p_1 = q_1 = 1$.

$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $q_n = F_n$, $p_n = F_{n+1}$ – числа Фибоначчи. Аттрактором рядов, а также их взаимного отношения, является "золотая" константа Φ.

$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $q_n = F_{2n-1}$, $p_n = F_{2n}$ – нечетные и четные числа Фибоначчи, $A = 2 + \phi = \Phi^2 \approx 2{,}61803$.

$V = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $q_n = F_{3n-2}$, $p_n = F_{3n-1}$,

$A = 3 + 2\phi = 2 + \sqrt{5} = 3 + 4\sin\dfrac{\pi}{10} = 1 + 4\cos\dfrac{\pi}{5} \approx 4{,}23607$ – мантисса совпадает с мантиссой квадратного корня из пяти, который в свою очередь равен предельному отношению чисел Люка и Фибоначчи $\lim\limits_{n \to \infty} L_n / F_n = \sqrt{5} = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{arctg} 2)}$.

$V = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$: $A = 4 + 3\phi = 3\Phi + 1 = \dfrac{5+\sqrt{45}}{2} \approx 5{,}85410$ – корень уравнения $x^2 - 5x - 5 = 0$, который можно представить цепной дробью из одних пятерок, аналогично числу Φ:

$$x = 5+\frac{5}{x} = 5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{x}} = 5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{5+\ddots}}} = 3\Phi+1.$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}:\ A = 5+4\phi = 4\Phi+1 = 3+\sqrt{20} \approx 7{,}47214\ .$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}:\ A = 6+5\phi = 5\Phi+1 = 5\Phi^2-4 = 9+\cos\frac{\pi}{5} \approx 9{,}09017.$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}:\ A = 7+6\phi = 6\Phi+1 = 4+\sqrt{45} = 7+\frac{6}{\Phi} \approx 10{,}70820.$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 8 & 1\end{pmatrix}:\ A = 9+8\phi = 8\Phi+1 = 5+\sqrt{80} \approx 13{,}94427\ .$$

$$\mathrm{V}=\begin{pmatrix}a_1+1 & 1\\ 1 & a_1\end{pmatrix}:\ A=\Phi+a_1.$$

В общем случае можно сформировать бесконечное множество моделей в виде взаимосвязанных последовательностей, в основе которых лежит константа золотого сечения.

Числовые ряды различаются в зависимости от назначенных коэффициентов (a, d), а также пары начальных условий (p_1, q_1).

Если в исходной модели положить $a_2 = b_1$ и $b_2 = a_1 - b_1 < 0$, то получаем квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, которое свойственно большей части при золотом сечении единичного целого.

Ряды (p_n, q_n) в этом случае являются знакопеременными.

Аттрактор для соседних чисел числовых рядов равен малой константе золотого сечения со знаком минус $A=-\phi=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Обобщенная модель связанных последовательностей

Для обобщения задачи формирования множества взаимосвязанных последовательностей, основанных на золотом сечении, воспользуемся известным тождеством k-го порядка

$$x^k = F_k x + F_{k-1},$$

где F_k – числа Фибоначчи, $x=\Phi$.

В частности, для третьей степени $k=3$ имеем:

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \rightarrow$$
$$x^3 - x^2 - x = x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Система трех взаимоувязанных разностных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_1 \cdot p_n + a_2 \cdot q_n + a_3 \cdot f_n \,, \\ q_{n+1} = b_1 \cdot p_n + b_2 \cdot q_n + b_3 \cdot f_n \,, \\ f_{n+1} = c_1 \cdot p_n + c_2 \cdot q_n + c_3 \cdot f_n \,. \end{cases}$$

Введем обозначения отношений

$$x = \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n}{f_n} \qquad \to \qquad x^2 = \frac{p_n}{f_n}\,.$$

В пределе они образуют такие равенства:

$$x = \frac{a_1 x^2 + a_2 x + a_3}{b_1 x^2 + b_2 x + b_3} \qquad \to \qquad x^3 - \underset{0}{\frac{a_1 - b_2}{b_1}} x^2 - \underset{2}{\frac{a_2 - b_3}{b_1}} x - \underset{1}{\frac{a_3}{b_1}} = 0\,,$$

$$x = \frac{b_1 x^2 + b_2 x + b_3}{c_1 x^2 + c_2 x + c_3} \qquad \to \qquad x^3 - \underset{0}{\frac{b_1 - c_2}{c_1}} x^2 - \underset{2}{\frac{b_2 - c_3}{c_1}} x - \underset{1}{\frac{b_3}{c_1}} = 0\,,$$

где коэффициенты уравнений равны числам $(0,\ 2,\ 1)$, что соответствует "золотой" модели.

Сгруппируем коэффициенты через матрицу $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$

Приняв первый столбец данной матрицы вариабельным и задаваемым априори, определим через него остальные коэффициенты:

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 + 2b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ c_1 & b_1 & a_1 - 2c_1 \end{pmatrix}.$$

Решением системы является константа золотого сечения

$$x = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{f_n} = \Phi\,.$$

Аттрактор последовательностей равен

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{q_n}{q_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} =$$
$$= (b_1 + c_1)\Phi + a_1 - c_1 = a_1 + b_1\Phi + c_1\phi.$$

Используя изложенный подход, нетрудно выйти на модель k-го порядка.

Система алгебраических уравнений относительно переменной x образуется путем деления полиномов $P_k(u) = u_1 x^k + u_2 x^{k-1} + \ \ldots\ + u_k$:

$$x = \frac{P_k(a)}{P_k(b)} = \frac{P_k(b)}{P_k(c)} = \frac{P_k(c)}{P_k(d)} = \dots$$

Обозначим для удобства представления первый столбец k-мерным вектором

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k)^{\mathrm{T}}.$$

С учетом тождества $x^k = F_k x + F_{k-1}$ в общем случае матрица коэффициентов представляется в виде:

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 & g_{k-1} & g_{k-2} & g_{k-3} & \cdots & g_2 & F_{k-1}v_2 \\ v_2 & v_1 & g_{k-1} & g_{k-2} & \cdots & g_3 & F_{k-1}v_3 \\ v_3 & v_2 & v_1 & g_{k-1} & \cdots & g_4 & F_{k-1}v_4 \\ v_4 & v_3 & v_2 & v_1 & \cdots & g_5 & F_{k-1}v_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{k-1} & v_{k-2} & v_{k-3} & v_{k-4} & \cdots & v_1 & F_{k-1}v_k \\ v_k & v_{k-1} & v_{k-2} & v_{k-3} & \cdots & v_2 & v_1 - F_k v_k \end{pmatrix}$$

где для краткости записи введено обозначение $g_m = F_k v_m + F_{k-1} v_{m-1}$.

Матрица V структурно содержит четыре части: нижняя треугольная – v_i, верхняя треугольная неполная – g_i, крайний столбец – $F_{k-1}v_i$ и нижний правый элемент $v_1 - F_k v_k$.

Алгоритм формирования матрицы V, $r = k-1$:

1) $\mathrm{V}_{i,j} = v_{i+1-j}, \quad i = \overline{1,\ k},\ j = \overline{1,\ i}$;

2) $\mathrm{V}_{i-1,k} = F_{k-1} v_i, \quad i = \overline{2,\ k}$;

3) $\mathrm{V}_{k,k} = v_1 - F_k v_k$;

4) $\mathrm{V}_{1,j+1} = F_k v_{k-j} + F_{k-1} v_{k+1-j}, \quad j = \overline{1,\ k-2}$ if $k \ge 3$;

5) $\mathrm{V}_{i,j} = \mathrm{V}_{i-1,j-1}, \quad j = \overline{3, r},\ i = \overline{2, r}$ if $k \ge 4$.

Набор $i = \overline{1, k}$ рекуррентных последовательностей вычисляется путем суммирования

$$Y_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{V}_{i,j} \cdot Y_{j,n} .$$

Аттрактор $A_k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Y_{i,n}}{Y_{i,n-1}},\ i = \overline{1, k}$ для всех последовательностей одинаковый, и определяется соотношением

$$A_k = \Phi\alpha + \beta =$$

$$= \Phi \cdot \sum_{j=2}^{k} v_j F_{j-1} + v_1 - v_k F_{k-1} + \underbrace{\sum_{j=3}^{k-1} v_j F_{j-2}}_{if \quad k \geq 4}.$$

Например, для произвольно выбранного исходного вектора $v = (5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ образуется матрица коэффициентов

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{13} & \mathbf{21} & \mathbf{34} & \mathbf{47} & \mathbf{20} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{13} & \mathbf{21} & \mathbf{34} & \mathbf{15} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{13} & \mathbf{21} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{13} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

с начальными значениями числовых последовательностей

n	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}
1	1	1	1	1	1	1
2	140	92	56	32	20	8
3	5260	3220	1984	1240	760	496
4	197624	122252	75620	46676	28892	17720
5	7464724	4613140	2850700	1762060	1088752	673552
6	281711564	174107804	107606324	66503504	41102864	25399796

Величина аттрактора для всех последовательностей $A = 19\Phi + 7 \approx 37{,}743$.

Любые соседние числовые ряды в пределе соотносятся между собой в золотой пропорции.

Альтернативные числовые ряды

Последовательные умножения квадратного уравнения золотого сечения $x^2 = x + 1$ на x или x^2 с последующим вариантами замены и упрощений позволяет сгенерировать большое множество золотоносных моделей произвольного порядка.

Одна из таких форм предложена в работе [8].

Исходное алгебраическое уравнение, которое названо *обобщенным уравнением золотого сечения*, имеет вид, $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$x^{2m} = \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} + 1.$$

В частности, "развернув" для наглядности знак-обозначение суммы, получаем

$$x^4 = x^3 + x^1 + 1,$$

$$x^6 = x^5 + x^3 + x^1 + 1,$$

$$x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x^1 + 1 \quad \text{и т. д.}$$

При любом целом значении m обобщенное уравнение ЗС имеет пару действительных корней $(-\phi,\ \Phi)$.

Используя данное уравнение и применяя описанный выше подход, можно образовывать взаимосвязанные последовательности.

Коэффициенты определяются на основе системы уравнений.

В частности, для $k=6$ соотношения формируют систему

$$\begin{cases} x^6-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{a_1-b_2}{b_1}}-\underset{\mathbf{0}}{\dfrac{a_2-b_3}{b_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{a_3-b_4}{b_1}}-\underset{\mathbf{0}}{\dfrac{a_4-b_5}{b_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{a_5-b_6}{b_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{a_6}{b_1}}=0\,, \\ x^6-\dfrac{b_1-c_2}{c_1}-\dfrac{b_2-c_3}{c_1}-\dfrac{b_3-c_4}{c_1}-\dfrac{b_4-c_5}{c_1}-\dfrac{b_5-c_6}{c_1}-\dfrac{b_6}{c_1}=0, \\ x^6-\dfrac{c_1-d_2}{d_1}-\dfrac{c_2-d_3}{d_1}-\dfrac{c_3-d_4}{d_1}-\dfrac{c_4-d_5}{d_1}-\dfrac{c_5-d_6}{d_1}-\dfrac{c_6}{d_1}=0, \\ x^6-\dfrac{d_1-u_2}{u_1}-\dfrac{d_2-u_3}{u_1}-\dfrac{d_3-u_4}{u_1}-\dfrac{d_4-u_5}{u_1}-\dfrac{d_5-u_6}{u_1}-\dfrac{d_6}{u_1}=0, \\ x^6-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{u_1-r_2}{r_1}}-\underset{\mathbf{0}}{\dfrac{u_2-r_3}{r_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{u_3-r_4}{r_1}}-\underset{\mathbf{0}}{\dfrac{u_4-r_5}{r_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{u_5-r_6}{r_1}}-\underset{\mathbf{1}}{\dfrac{u_6}{r_1}}=0\,, \end{cases}$$

Выделенные жирным шрифтом числа 0 и 1 означают значения соответствующих величин, исходя из обобщенного уравнения ЗС.

Задавая априори шесть коэффициентов $v=(a_1\quad b_1\quad \cdots\quad r_1)^{\mathrm{T}}$, из приведенных пяти уравнений можно определить оставшиеся 5×6 = 30 параметры.

Обозначим для удобства представления первый столбец матрицы коэффициентов через k-мерный вектор

$$v=(a_1\quad b_1\quad \cdots\quad r_1)^{\mathrm{T}}=(v_1\quad v_2\quad \cdots\quad v_k)^{\mathrm{T}},$$

и через него определим оставшиеся коэффициенты.

Примеры матрицы V для моделей 4-го и 6- го порядков:

$$\mathrm{V}_4=\begin{pmatrix} v_1 & v_3+v_4 & v_2+v_3 & v_2 \\ v_2 & v_1-v_2 & v_3+v_4 & v_3 \\ v_3 & v_2-v_3 & v_1-v_2 & v_4 \\ v_4 & v_3-v_4 & v_2-v_3 & v_1-v_2-v_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{V}_6=\begin{pmatrix} v_1 & v_3+v_5+v_6 & v_2+v_4+v_5 & v_3+v_4 & v_2+v_3 & v_2 \\ v_2 & v_1-v_2 & v_3+v_5+v_6 & v_4+v_5 & v_3+v_4 & v_3 \\ v_3 & v_2-v_3 & v_1-v_2 & v_5+v_6 & v_4+v_5 & v_4 \\ v_4 & v_3-v_4 & v_2-v_3 & v_1-v_2-v_4 & v_5+v_6 & v_5 \\ v_5 & v_4-v_5 & v_3-v_4 & v_2-v_3-v_5 & v_1-v_2-v_4 & v_6 \\ v_6 & v_5-v_6 & v_4-v_5 & v_3-v_4-v_6 & v_2-v_3-v_5 & v_1-v_2-v_4-v_6 \end{pmatrix}.$$

В общем случае для формирования квадратной матрицы V произвольного k-порядка можно воспользоваться универсальным алгоритмом, $r = k - 1$:

1) $\mathrm{V}_{i,1} = v_i, \qquad i = \overline{1, k}$;

2) $\mathrm{V}_{i,k} = v_{i+1}, \qquad i = \overline{1, r}$;

3) $\mathrm{V}_{i+j,\,j+1} = v_i - \underbrace{\sum_{t=0}^{k/2} v_{i+2t+1}}_{\text{if } j \ge 2t+1}, \qquad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, k-i}$;

4) $\mathrm{V}_{i,\,j+1} = v_{k-j+1} - \underbrace{\sum_{t=0}^{k/2} v_{k-j-2t}}_{\text{if } i+j \le r-2t}, \quad i = \overline{1, k-2}, \quad j = \overline{1, r-i}$.

Аттрактор $A_k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Y_{i,n}}{Y_{i,n-1}}$, $i = \overline{1, k}$ для всех последовательностей определяется одним соотношением

$$A_k = \phi \cdot \sum_j v_{2j} + \sum_j v_{2j-1}, \quad j = \overline{1,\ k/2}.$$

Например, для исходного вектора $v = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ имеем матрицу коэффициентов

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

и начальные значения числовых последовательностей

n	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}	Y_{1n}
1	1	1	1	1	1	1
2	12	9	6	3	0	-3
3	60	33	15	6	6	15
4	243	144	99	81	63	18
5	1278	846	549	306	117	63
6	6372	3834	2187	1269	918	729
7	29538	18036	11475	7668	4914	2727
8	145962	91854	57429	34425	19683	11502

с величиной аттрактора для всех последовательностей $A = 3\phi + 3 \approx 4{,}854$.

Другая матрица коэффициентов $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ дает аттрактор $A = 1 + \Phi = \Phi^2$.

То есть внутри себя каждый из образуемых числовых рядов имеет отношение соседних элементов Φ^2, а соседние последовательности – константу золотого сечения Φ.

По идее, формируемые в этом случае ряды должны иметь некую генетическую связь с четными и нечетными элементами последовательностей Фибоначчи при соответствующих начальных условиях.

Однако на первоначальном этапе формирования наши числовые ряды имеют весьма слабое сходство со структурным построением Фибоначчи:

1	1	1	1	1	1
5	2	2	2	2	2
16	7	4	4	4	4
44	23	11	8	8	8
115	67	34	19	16	16
296	182	101	53	35	32
760	478	283	154	88	67
1958	1238	761	437	242	155
5074	3196	1999	1198	679	397
13223	8270	5195	3197	1877	1076

Подобных примеров здесь можно привести немало.

Это свидетельствует о возможности скрытых механизмов формирования золотоносных структур, которые на начальном этапе себя могут не обнаруживать или выражать весьма слабо. Но только в процессе формирования.

На конечных стадиях синтеза устойчивых образований проявление золотых свойств, если таковое вообще имеется, должно проявляться достаточно отчетливо. Что позволяет утверждать об их явном присутствии-наличии.

В противном случае высока вероятность «написания сочинения на заданную тему». Когда желаемое выдается за действительное, а исследуемый объект наделяется свойствами, которые в принципе ему не свойственны.

Именно по такой схеме генерируются подмены понятий. Возможно, самопроизвольно и неосмысленно.

Но всё-таки появляются.

Сказанное ещё раз убеждает нас в необходимости тщательной проверки-оценки материалов, в которых сообщается об очередном сенсационном проявлении золотого сечения. Хотя на поверку оказывается – "пшик".

Оно и верно. Ибо не каждая курочка способна нести золотые яйца…

На этом, пожалуй, можно и остановиться, помня о бритве Оккама:

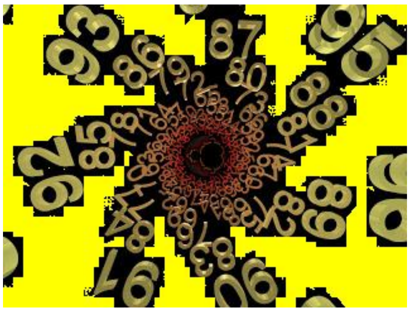
«не следует множить сущее без необходимости».

Литература:

1. Kepler J. Mysterium Cosmographicum, 1596.
2. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110.
3. Чернов А. Заметки о вечном / Sectio aurea. Имя, данное по ошибке. – 2009. – URL: http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_0_1.htm.
4. Чернов А. Заметки о вечном / Альтернативный алгоритм ряда Фибоначчи и обобщенный алгоритм для √2 и золотого сечения. – 2009. – URL: http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_2.htm.

5. Рассел Б. История западной философии, и её связь с политическими и социальными условиями от античности до наших дней: 3- изд. испр. – Новосибирск: Сибир. универ. изд-во, 2001. – URL: http://psylib.org.ua/books/rassb01/index.htm.
6. Василенко С.Л. Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.
7. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.
8. Василенко С.Л. Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

Харьков, Украина



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html