Квадратичные интерпретации золотой пропорции

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Рассмотрена универсальная алгебраическая модель второго порядка, которая выражает целые степени константы золотого сечения $\Phi^{\pm n}$, а при желании – их одновременное пропорциональное масштабирование. За основу взят квадратичный полином с коэффициентами в виде чисел Люка 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18 ... Проанализированы бесконечные встроенные радикалы и непрерывные дроби, рекурсивные формы, взаимодействие с классическими числами Люка и Фибоначчи, масштабирование корней, дополнительные решения и др. Высказаны замечания по вопросу неправомерного обобщения математической золотой константы. Конспективно представлена интерпретация результатов в системе координат «хаос – порядок».

Есть у сечения начало,
нет у сечения конца…

Главное – вовремя остепениться…

Поставленные нами вопросы имеют непосредственное отношение к алгебраическому толкованию золотой пропорции в её степенных проявлениях. Они нашли частичное отражение в работах [1, 2].

Целью настоящей статьи является общее структурирование материала с единых позиций квадратичных интерпретаций степеней для константы золотого сечения.

В основе модели по-прежнему лежит квадратное уравнение с различными вариациями золотых корней.

Не водкой едины

В недавние шестидесятые, когда я ещё ходил в школу, одна из отечественных газет привела любопытный пример на тему водочных цен:

– Знаете ли вы, что стоимость четвертинки, возведенная в степень, равную стоимости поллитровки, есть число π с точностью до первых трех знаков?

Действительно, четвертинка стоила тогда – 1,49 руб., а поллитровка – 2,87 руб.

В результате получалась оригинальная степень $1{,}49^{2{,}87} \approx 3{,}14$.

Воистину, человеческие фантазии без границ.

Образно говоря, вся наша малопьющая страна на шестой части суши, которой, видимо, всегда было мало, жила, того не замечая, под знаком "пи".

Конечно, это случайное совпадение. Не более того.

Да и цены те остались в безвозвратном прошлом, уже мало кого сегодня ностальгируя.

И всё-таки, не прибавить, не отнять...

Или как гласит эпиграф, главное – вовремя остепениться.

То ли стать степенным и взяться за ум... То ли получить ученую степень...

Но лучше всего в идеале, раз и навсегда зафиксировать цены. Нечто по образу и подобию водочных степеней. Чтобы галопирующая инфляция не съедала те небольшие крохи, которые с большим трудом зарабатывает подавляющая часть жителей нашей планеты.

Возможно, именно поэтому привлекают внимание вечно неизменные математические константы, неподдающиеся влиянию времени.

Они содержат некую основательность. Стабильность и фундаментальность.

Об одной из них – числе золотого сечения – пойдет речь ниже.

Исходный посыл

При делении целого на две произвольные части или синтезе целого из двух составляющих между ними возникает бесконечное множество отношений.

Одно из них – широко известное золотое сечение (ЗС).

В работе [3] частично затронут вопрос о расширении задачи ЗС в части степенных форм и масштабирования Последнее в математике не так важно. Именно поэтому, без потери общности рассуждений, в задаче золотого сечения целое обычно приравнивается единице.

В виду краткости изложения данного подраздела, некоторые немаловажные моменты остались за рамками рассмотрения, вероятно, порождая отдельные затруднения восприятия.

Разумно восполнить этот пробел и развить характеристики предметной области.

Два частных случая отражены в статье [4], где предметом обобщения стало уравнение золотого сечения с его преобразованием в две характеристические формы второго порядка:

$$a^2 = da + d^2, \qquad b^2 = 3db - d^2.$$

На фоне видимой сложности и витиеватости преобразований [4] обе конфигурации в действительности весьма очевидны. Причем они дают одинаковое решение

$$(a,\ b,\ c)\ =\ d\Phi\cdot\left(1,\ \Phi,\ \Phi^2\right) = d\Phi^3\cdot\left(\phi^2,\ \phi,\ 1\right),$$

где $c = a + b$ – целое, состоящее из меньшей a и большей b частей; $d = (b - a)$ – их разность; $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1{,}618$; $\phi = \Phi^{-1} = \Phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$ – золотые константы.

То есть, мы видим обычное золотое сечение $1 = \phi + \phi^2$, только с масштабированием единичного отрезка в $d\Phi^3$ раз.

Всё здесь достаточно корректно.

Излишней является, пожалуй, гиперболизация значимости деления в золотом отношении отрезка произвольной длины по сравнению с его единичным аналогом. Ибо с точки зрения математики это практически одно и то же.

Идентичность упомянутых двух уравнений проявляется в самых разных ракурсах.

Например, по первому характеристическому уравнению можно составить эквивалентное разностное уравнение или обобщенную последовательность f_n с начальными условиями $(f_0,\ f_1)=(0,\ 1)$, которая непосредственно связана с числами Фибоначчи F_n исключительно по степенному фактору:

$$f_n = df_{n-1} + d^2 f_{n-2} = d^{n-1} F_n .$$

Развитие задачи

Основообразующие триномы $x^2 - x - 1,\ x^2 - 3x + 1$ являются частными случаями более общей квадратичной модели.

Она легко воссоздается, если за основу взять явную (аналитическую) формулу Муавра–Бине для чисел Люка $L_k = \Phi^k + (-\phi)^k$, теорему Виета [5], выражающую коэффициенты квадратного уравнения через сумму и произведение его корней, а также "единичное" свойство сомножителей $\Phi^k (-\phi)^k = (-1)^k$.

Можно также дополнительно ввести коэффициент масштабирования-пропорциональности m.

Изначально задавшись парой корней $\lambda'_{1,2} = m\{\Phi^n,\ (-\phi)^n\}$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$x^2 - mL_k x + (-1)^k m^2 = 0, \tag{1}$$

где L_k – числа Люка (k = 0, 1, 2 ...): 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 ...;
k – степень константы золотого сечения Φ.

Полученное уравнение (1) допустимо именовать «уравнением <моделью> золотых степеней». Кроме того, можно провести традиционные аналогии между целым и его двумя частями.

Например, на основе геометрического отрезка фиксированной длины.

Так, величина k представляет собой численное выражение целого или длины отрезка в соответствующей метрике или единицах измерения.

Без потери общности рассуждений обычно принимается, что целое равно единице.

В противном случае имеет место обычное линейное масштабирование с коэффициентом пропорциональности m.

Тогда меньшая часть целого составляет

$$a \ = \ \lambda'_1 \phi^{k+2} \ = \ m\Phi^k \phi^{k+2} \ = \ m\phi^2 \ \approx \ m \cdot 0{,}382 .$$

Большая часть – соответственно

$$b \ = \ m - a \ = \ m\phi \ \approx \ m \cdot 0{,}618 .$$

В таблице 1 для обзора представлены некоторые частные случаи модели золотых степеней.

Таблица 1

Начальные параметры уравнения золотых степеней

k	L_k	Квадратный трехчлен	Корни тринома $\lambda'_{1,2} = \Phi^k,\ (-\phi)^k$	
0	2	x^2-2x+1	1, 1	1, 1
1	1	x^2-x-1	$\Phi,\ -\phi$	1.618, –0.618
2	3	x^2-3x+1	$\Phi^2,\ \phi^2$	2.618, 0.382
3	4	x^2-4x-1	$\Phi^3,\ -\phi^3$	4.236, –0.236
4	7	x^2-7x+1	$\Phi^4,\ \phi^4$	6.854, 0.146
5	11	$x^2-11x-1$	$\Phi^5,\ -\phi^5$	11.090, –0.090
6	18	$x^2-18x+1$	$\Phi^6,\ \phi^6$	17.944, 0.056

Примечательно, что сумма всех степеней $(-\phi)^i$ равна ϕ:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-\phi)^i = \phi.$$

А сумма удвоенных или четных степеней равна Φ:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\phi^{2i} = \Phi.$$

Имеет место также единичное тождество

$$\sum_{i=0}^{\infty}\phi^{2i+1} = \sum_{i=2}^{\infty}\phi^{i} \equiv 1.$$

Если это тождество умножить на степень ϕ^k, то получим выражение для этой степени через суммирование последующих степеней [6, с. 108–109]:

$$\phi^k = \sum_{i=0}^{\infty}\phi^{k+2i+1} = \sum_{i=2+k}^{\infty}\phi^{i}.$$

Итак, для разных чисел Люка получаем бесконечное множество квадратных уравнений общего вида (1), дающих не только степени золотой константы $\Phi^{\pm k}$, но также их пропорциональное изменение за счет параметра m.

Отсюда становится ясным происхождение в уравнении квадрата m^2: в результате произведения корней, имеющих одинаковый коэффициент пропорциональности.

Вполне понятным оказываются значения средних коэффициентов 1 и 3, а также смена знака при свободном члене триномов x^2-x-1, x^2-3x+1.

Если m – целое число, то квадратное уравнение имеет целочисленные коэффициенты.

Полученное соотношение вполне подходит под категорию обобщенного квадратичного уравнения (модели <второго порядка>) степеней золотого сечения.

При желании степени образуемых корней $\Phi^{\pm k}$ можно назвать «семейством степеней золотой константы».

Говорить о каких-то проявлениях родовых признаков, в частности, об отношении корней в нашем уравнении $|\lambda_1/\lambda_2| = \Phi^{2k}$, особо не приходится. В силу очевидности.

Единственный отличительный признак здесь неизменно связан с самим присутствием в решении константы Φ.

Вместе с тем подобных золотосодержащих структур существует превеликое множество. Даже в разрезе квадратных уравнений.

Так, модель нечетных коэффициентов квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$ для любой тройки целых нечетных чисел v, p и $q = \dfrac{5v^2 - p^2}{4}$ приводит к решению $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm v\sqrt{5}}{4}$ с иррациональностью $\sqrt{5} = \Phi + \phi$.

Например, для $v = 7$ получаем такие пары коэффициентов уравнения:

$(p\ \ q)$ = (1 61), (3 59), (5 55), (7 49), (9 41), (11 31), (13 19), (15 5), (17 –11), (19 –29) …

Все они дают решение $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm 7(\Phi + \phi)}{4}$.

Параллели с квадратным уравнением общего вида

Необходимо отметить, что описанное свойство степеней золотого сечения вовсе не является чем-то уникальным или характерным исключительно для "золотой" модели.

Оно во многом присуще действительным корням квадратного уравнения общего вида.

Так, уравнение $x^2 - px - q = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$.

Образуем обобщенную квадратичную последовательность Люка $L_k = pL_{k-1} + qL_{k-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ p)$.

Не сложно показать, что за счет принятой пары "затравочных" чисел $(2,\ p)$ данная рекуррентная последовательность допускает простое явное представление своих членов

$$L_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k.$$

Тогда видоизмененное квадратное уравнение $x^2 - mL_k x + (-q)^k m^2 = 0$ имеет корни $\lambda'_{1,2} = m \cdot \lambda_{1,2}^k$, которые равны m-масштабированным степеням исходных корней $\lambda_{1,2}$.

Обычно коэффициент пропорциональности выражается единицей $m = 1$.

В этом случае соответствующее модифицированное уравнение записывается, как $x^2 - L_k x + (-q)^k = 0$, и содержит корни $\lambda'_{1,2} = \lambda_{1,2}^k$.

То есть оно выражает n-е степени корней исходного трехчлена:

$$x^2 - px - q \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2};$$

$$x^2 - L_k x + (-q)^k \quad \Rightarrow \quad \lambda'_{1,2} = \lambda_{1,2}^k.$$

При этом соотношение корней равно $\dfrac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \lambda_1^{2k} \cdot (-q)^{-k}$.

Заметим, что возведение в степень имеет две обратные функции.
Это логарифм и корень k-й степени.

Истоки научных искажений

Искусство обобщения – вещь тонкая.

Неправомерное обобщение – один из признаков лженауки. Тем более, когда речь идет об абсолютизации частного случая со своей математической константой Ф за рамки её применимости, где вместо специфичного квадратного корня $\sqrt{5}$, формирующего золотое сечение (ЗС), фигурируют радикалы (лат. *radix* знак корня) совершенно иных величин.

Более того, подобного рода материал часто преподносится с претензией на непогрешимость и отвержение конструктивной критики. Без тени сомнения. Действуя по принципу "хотелок": как желаем, так и называем. Вопреки математическим правилам и традициям. Когда золотым сечением и его константой раз и навсегда наименовано число Ф.

Никакой иной золотой константы и соответствующей ей модели, хоть трижды или четырежды обобщенной, не существует в принципе.

Какие угодно постоянные, только не золотые.

Квадратные уравнения общего вида, иногда также называют (по ошибке) обобщенными золотыми сечениями или металлическими пропорциями, что более правильно.

Хотя в общем случае они не имеют ничего общего с золотой константой, разве что солидарную принадлежность к алгебраическим уравнениям.

Здесь смешивается буквально всё: терминологический нигилизм, погоня за сенсациями, неотступное желание свершить «золотую революцию» в науке.

Авторам словесных новшеств казалось, «поймали бога за бороду». Но, увы…

В то же время отдельные квадратные уравнения с целыми коэффициентами имеют прямое отношение к золотому сечению. Но почему-то остались вне поля зрения ортодоксальных представителей данного направления.

Образно говоря, пережали клавиши там, где не надо, и не дожали там, где нужно.

В результате, вместе гармонического лада получается какофония-дисгармония.

Напомним, в последние годы ряд авторов с завидной настойчивостью пропагандируют новоявленную «математику гармонии» (МГ), претендующую на роль универсальной спасительницы для формализованного описания и моделирования бытия.

При этом самих «математиков–гармонистов» нисколько не смущает тот факт, что "математики <чего-то>" не бывает.

В частности, «математикой гармонии» называют «современную теорию чисел Фибоначчи» [7], которая и так, без всяких терминологических наслоений, является вполне самостоятельным и самодостаточным разделом математики.

На наш взгляд, термин МГ изначально слабо обоснован (научно, лингвистически) и представляет механическое словосочетание сленгового типа, что приводит к потере логически обусловленной сопоставимости двух совершенно разных и глубоких по содержанию словесно-понятийных форм.

В целом обнаруживается легковесность используемой терминологии и сомнительность её содержания, что, в конечном счете, создает путаницу причинно-следственных отношений в целях и задачах.

В продолжение начатой темы, попробуем несколько исправить положение, опираясь в целом на известные закономерности, присущие числам Фибоначчи и золотому сечению.

Квадратное уравнение степеней золотого сечения

Вернемся к уравнению (модели) золотых степеней (1).
Уравнение содержит пару вещественных корней – степеней константы ЗС:

$$\left\{(-\phi)^k,\ \Phi^k\right\}, \qquad \Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \phi=\Phi^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Начальные варианты уравнений и их решения имеют вид:

$$x^2-x-1=0, \quad -\phi^1,\ \Phi^1; \qquad x^2-3x+1=0, \quad \phi^2,\ \Phi^2;$$

$$x^2-4x-1=0, \quad -\phi^3,\ \Phi^3; \qquad x^2-7x+1=0, \quad \phi^4,\ \Phi^4;$$

$$x^2-11x-1=0, \quad -\phi^5,\ \Phi^5; \qquad x^2-18x+1=0, \quad \phi^6,\ \Phi^6\ \ldots$$

С учетом обратимости корней $\phi^k=\Phi^{-k}$ квадратное уравнение

$$y^2+L_k y+(-1)^k=0$$

также дает степени золотой константы $\left\{-\Phi^k,\ (-\phi)^{k+1}\right\}$:

$$y^2+y-1=0, \quad -\Phi^1,\ \phi^1; \qquad y^2+3y+1=0, \quad -\Phi^2,-\phi^2;$$

$$y^2+4y-1=0, \quad -\Phi^3,\ \phi^3; \qquad y^2+7y+1=0, \quad -\Phi^4,-\phi^4;$$

$$y^2+11y-1=0, \quad -\Phi^5,\ \phi^5; \qquad y^2+18y+1=0, \quad -\Phi^6,-\phi^6\ \ldots$$

То есть уравнение (1) справедливо и для отрицательных значений k в части расширения чисел Люка по формуле $L_{-k}=(-1)^k L_k$.

При этом сохраняется общая аддитивная форма $L_k=L_{k-1}+L_{k-2}$ с формированием бесконечного числового ряда в обе стороны:

$$\longleftarrow\quad \mathbf{0} \quad\longrightarrow$$

… 18, –11, 7, –4, 3, –1, **2**, 1, 3, 4, 7, 11, 18 …

Отрицательные корни – вполне самостоятельные решения. Они имеют отношение к внешнему делению целого в заданном отношении [8].

Примечательно, что три базовых квадратных уравнения, определяющих золотое сечение единичного целого $a+b=1$ в виде пропорции $\lambda=\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}$, полностью вписываются в золотую модель Люка:

- отношение $\lambda=\frac{1}{b}=\frac{b}{a}$ $\rightarrow$ $\lambda^2-\lambda-1=0$, $\lambda=\Phi$ – точка внутреннего деления;
- большая часть $\rightarrow$ $b^2+b-1=0$, $b=\phi$;
- меньшая часть $\rightarrow$ $a^2-3a+1=0$, $b=\phi^2$.

Зато, например, уравнение $x^2+4x-1=0$ адекватно пропорции $\frac{x}{1}=\frac{1}{x+4}$, которая выражает меньшую часть $x=\phi^3\approx 0{,}236$ золото-степенного ("кубического") сечения единичного отрезка (рис. 1):

часть так относится к целому, как оно – к сумме этой части и четырех целых.

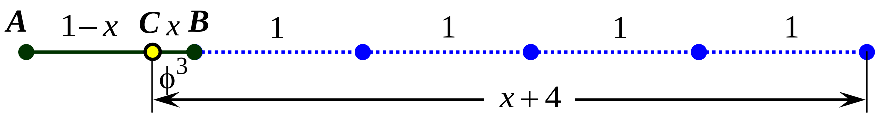

Рис. 1. Золото-степенное сечение единичного отрезка $AB = 1$

Понятно, что недостающие целые величины для формирования пропорции приходится привлекать извне.

Бесконечные дроби и радикалы

Применяя несложные преобразования путем рекурсивной замены решения через «самоё себя», получаем разложение степени Φ^k в бесконечную непрерывную дробь

$$\Phi^k = x = L_k-\frac{(-1)^k}{x} = L_k-\cfrac{(-1)^k}{L_k-\cfrac{(-1)^k}{x}} = L_k-\cfrac{(-1)^k}{L_k-\cfrac{(-1)^k}{L_k-\cfrac{(-1)^k}{L_k-\ldots}}}$$

и бесконечный встроенный радикал

$$\Phi^k = x = \sqrt{1'+L_k x} = \sqrt{1'+L_k\sqrt{1'+L_k x}} = \sqrt{1'+L_k\sqrt{1'+L_k\sqrt{1'+\ldots}}},$$

где принято условное обозначение $1'=(-1)^{k+1}$.

Например,

$$\Phi^3=\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}} = 4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}},$$

$$\Phi^4 = \sqrt{-1+7\sqrt{-1+7\sqrt{-1+7\sqrt{-1+\cdots}}}} = 7-\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{7-\ddots}}}.$$

Взаимодействие с числами Люка и Фибоначчи

Целые степени большой и малой золотой константы связаны с числами Фибоначчи F_k и Люка L_k аддитивными соотношениями [9]:

$$\Phi^k = \Phi F_k + F_{k-1}\,, \qquad (-\phi)^k = -\phi F_k + F_{k-1}\,;$$

$$\Phi^k = F_{k+1} + \phi F_k\,, \qquad (-\phi)^k = F_{k+1} - \Phi F_k\,;$$

$$\Phi^k = \frac{L_k + F_k\sqrt{5}}{2}\,, \qquad (-\phi)^k = \frac{L_k - F_k\sqrt{5}}{2}\,;$$

$$\Phi^k = \frac{\Phi L_k + L_{k-1}}{\sqrt{5}}\,, \qquad (-\phi)^k = \frac{\phi L_k - L_{k-1}}{\sqrt{5}}\,.$$

Здесь каждая k-я степень золотой константы Φ^k или её обратного значения (малой золотой константы) $\phi^k = \Phi^{-k}$ тождественно уравнивается совместным присутствием чисел $L_k \pm F_k\sqrt{5}$ либо их обособленным наличием (чисел Фибоначчи <u>или</u> чисел Люка) с добавлением первой степени постоянной Ф.

Рекурсии

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина «золотое сечение», замечательный искусствовед и философ Василий Зубов в свое время давал оригинальный текст высказывания Кеплера [10]: «Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении... Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит». – J. Kepler, Mysterium Cosmographicum, 1596.

Таким образом, если теорема Пифагора сродни золоту, а пропорциональное сечение – драгоценному камню, то математическая рекурсия – воистину жемчужина алгоритмов.

Переход от уравнения (1) к эквивалентному разностному аналогу дает следующее уравнение для линейной рекуррентной (возвратной) последовательности

$$x_n \;=\; L_k x_{n-1} - (-1)^k x_{n-2} \;=\; \frac{F_{kn}}{F_k}\,. \tag{2}$$

В математике известная формула Муавра–Бине выражает в явном (аналитическом) виде общий член последовательности x_n как функцию от порядкового номера n через корни характеристического многочлена (λ_1, λ_2).

Для традиционных начальных условий «ноль, единица» $(x_0, x_1) = (0,\ 1)$ имеем:

$$x_n \;=\; \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Напомним [11], с легкой руки Н. Воробьева и некоторых других математиков прошлого века исходная формула часто называется именем Бине.

Хотя за 135 лет до него данное соотношение впервые получено другим известным французским математиком Муавром (1718). Поэтому ради исторической справедливости, следует называть, по меньшей мере, формулой Бернулли–Бине.

В случае произвольных начальных условий $(X_0,\, X_1)$ получаем

$$X_n \;=\; X_1\frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}-X_0\lambda_1\lambda_2\,\frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2} \;=\; X_1x_n-X_0\lambda_1\lambda_2x_{n-1}.$$

Квадратное уравнение золотой степени отличается свойством $\lambda_1\lambda_2=1$, то есть

$$X_n = X_1x_n - X_0x_{n-1}.$$

Рекурсия (2) широко представлена в библиотеке целочисленных последовательностей [12] для разных значений k с соответствующими идентификационными кодами:

$k=2$: $\quad x_n \;=\; 3x_{n-1}-x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{2n}}{1}$ – четные числа Фибоначчи,

0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765, 17711, 46368, 121393… A001906,

$$x_n=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^n-\left(3-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot\sqrt{5}};$$

$k=3$: $\quad x_n \;=\; 4x_{n-1}+x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{3n}}{2}$,

0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292, 5473, 23184, 98209, 416020, 1762289, 7465176… A001076,

$$x_n=\frac{\left(4+2\sqrt{5}\right)^n-\left(4-2\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^n-\left(2-\sqrt{5}\right)^n}{2\sqrt{5}};$$

$k=4$: $\quad x_n \;=\; 7x_{n-1}-x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{4n}}{3}$,

0, 1, 7, 48, 329, 2255, 15456, 105937, 726103, 4976784, 34111385… A004187,

$$x_n=\frac{\left(7+3\sqrt{5}\right)^n-\left(7-3\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot 3\sqrt{5}};$$

$k=5$: $\quad x_n \;=\; 11x_{n-1}+x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{5n}}{5}$,

0, 1, 11, 122, 1353, 15005, 166408, 1845493, 20466831, 2517253805… A049666,

$$x_n=\frac{\left(11+5\sqrt{5}\right)^n-\left(11-5\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot 5\sqrt{5}};$$

$k=6$: $\quad x_n \;=\; 18x_{n-1}-x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{6n}}{8}$,

0, 1, 18, 323, 5796, 104005, 1866294, 33489287, 600940872, 10783446409… A049660,

$$x_n=\frac{\left(18+8\sqrt{5}\right)^n-\left(18-8\sqrt{5}\right)^n}{2^n\cdot 8\sqrt{5}}=\frac{\left(9+4\sqrt{5}\right)^n-\left(9-4\sqrt{5}\right)^n}{8\sqrt{5}};$$

$k=7$: $\quad x_n \;=\; 29x_{n-1}+x_{n-2} \;=\; \dfrac{F_{7n}}{13}$, 0, 1, 29, 842, 24447, 709805, 20608792, 598364773, 17373187209… A049667,

$$x_n = \frac{\left(29+13\sqrt{5}\right)^n - \left(29-13\sqrt{5}\right)^n}{2^n \cdot 13\sqrt{5}};$$

$$k=10: \qquad x_n = 123x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{F_{10n}}{5},$$

0, 1, 123, 15128, 1860621, 228841255, 28145613744, 3461681649257… A049670,

$$x_n = \frac{\left(123+55\sqrt{5}\right)^n - \left(123-55\sqrt{5}\right)^n}{2^n \cdot 55\sqrt{5}}.$$

Или в общем виде

$$x_n = \frac{(L_k + a_k)^n - (L_k - a_k)^n}{2^n a_k}, \qquad a_k = F_k\sqrt{5}.$$

В частности, рекурсию $x_n = 4x_{n-1} + x_{n-2}$ или в несколько измененной записи $x_{t+1} = 4x_t + x_{t-1}$ можно интерпретировать следующим образом:

будущее x_{t+1} равно 4-кратно усиленному настоящему x_t и ближайшему прошлому x_{t-1},

или условно (в суточном разрезе):

"завтра = 4-кратное сегодня + вчера".

В данных формах и соотношении (2) представлены числа Фибоначчи F_{kn} с k-кратными порядковыми номерами.

Для нечетных значений k имеет место формула, связывающая числа Фибоначчи F_{kn} со своими предшественниками F_n,

$$F_{kn} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{n(j+v)} \cdot T_{r,j} 5^j F_n^{2j+1},$$

где $r = \lceil k/2 \rceil$ – целая часть от половины k;

$v = \{0,\ k \pmod 4) = 1$ или $1,\ k \pmod 4) = 3$;

$T_{i,j}$ – элементы треугольной матрицы, вычисляемой рекуррентно:

$$T_{i,j} = 2T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} - T_{i-2,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 14 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 30 & 27 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 55 & 77 & 44 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 91 & 182 & 156 & 65 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 140 & 378 & 450 & 275 & 90 & 15 & 1 & 0 \\ 17 & 204 & 714 & 1122 & 935 & 442 & 119 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

Например,

$$F_{7n} = (-1)^n 7\cdot 5^0 F_n + 14\cdot 5^1 F_n^3 + (-1)^n 7\cdot 5^2 F_n^5 + 1\cdot 5^3 F_n^7;$$

$$F_{9n} = 9\cdot 5^0 F_n + (-1)^n 30\cdot 5^1 F_n^3 + 27\cdot 5^2 F_n^5 + (-1)^n 9\cdot 5^3 F_n^7 + 1\cdot 5^4 F_n^9.$$

Другой подход определения чисел Фибоначчи F_{kn} с k-кратными порядковыми номерами изложен в работе [13]:

$$F_{kn} = \begin{cases} F_n \cdot \sum_{j=0}^{(k-2)/2} (-1)^{jn} L_{n(k-2j-1)}, & k \pmod 2 = 0, \\ F_n \cdot \left[\sum_{j=0}^{(k-3)/2} (-1)^{jn} L_{n(k-2j-1)} + (-1)^{n(k-1)/2} \right], & k \pmod 2 = 1. \end{cases}$$

Масштабирование корней

Введение в (1) коэффициента пропорциональности $\lambda'_{1,2} = m\{(-\phi)^k,\ \Phi^k\}$ приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$x^2 - mL_k x + (-1)^k m^2 = 0.$$

Например, для пары корней $(-m\phi, m\Phi)$ с первой степенью золотых констант характеристическое уравнение приобретает вид: $x^2 - mx - m^2 = 0$.

Его частные случаи представлены в библиотеке целочисленных последовательностей [12] для разных значений m с соответствующими идентификационными кодами:

$\underline{m=2}$: $x_n = 2x_{n-1} + 4x_{n-2}$, $x_{2n-1} = 4x_{n-1}^2 + x_n^2$, $x_n = \sum_{i=0}^{n/2} 5^i C_n^{2i+1}$, A063727, A085449,

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{20}} \quad x_n = 2^{n-1} F_n;$$

$\underline{m=3}$: $x_n = 3x_{n-1} + 9x_{n-2} = 3^{n-1} F_n$, A099012, A122069,

$$x_n = \frac{(3+3\sqrt{5})^n - (3-3\sqrt{5})^n}{3\sqrt{5}\cdot 2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{45}};$$

$\underline{m=4}$: $x_n = 4x_{n-1} + 16x_{n-2} = 4^{n-1} F_n$, A099133,

$$x_n = \frac{(2+2\sqrt{5})^n - (2-2\sqrt{5})^n}{\sqrt{80}} = 2^n \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{80}}.$$

Элементы числовых последовательностей $x_n = mx_{n-1} + m^2 x_{n-2}$ с масштабированными золотоносными корнями $(-m\phi, m\Phi)$ для начальных условий $(x_0, x_1) = (0,\ 1)$ и разных коэффициентов m могут быть получены в виде единого массива аналитически $T_{m,\ j} = m^j F_{j+1}$ либо рекуррентно (A234357):

$$\begin{cases} T_{m,\,1} = m, \\ T_{m,\,2} = 2m^2, \\ T_{m,\,j} = mT_{m,\,j-1} + m^2 T_{m,\,j-2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 24 & 80 & 256 & 832 \\ 3 & 18 & 81 & 405 & 1944 & 9\cdots \\ 4 & 32 & 192 & 1280 & 8192 & 53248 \\ 5 & 50 & 375 & 3125 & 25000 & 203125 \\ 6 & 72 & 648 & 6480 & 62208 & 606528 \end{pmatrix}$$

Здесь первая строка – обычные числа Фибоначчи F_n, $n \ge 2$.

В общем случае предельное отношение x_{n+1}/x_n, $n \to \infty$ последовательности, которая является решением линейной рекуррентной формы $x^2 - mx - m^2 = 0$ с начальными условиями (x_0, x_1), равно m-кратной константе золотого сечения $m\Phi$, где m – положительное целое число.

Степени малой золотой константы

Целочисленные степени ϕ^k не являются полностью самостоятельными величинами, но производными от золотой константы Φ.

Меньшая часть ϕ^2 золотого сечения на две пропорциональные части становится наибольшей частью в аналогичной задаче бесконечномерного золотого деления единичной линии, то есть на бесконечное $k \to \infty$ число частей (рис. 2).

Или в новой интерпретации классического золотого сечения: две части золотого сечения отрезка единичной длины равны большим частям при его k-золотом делении соответственно на $k = 2$ и $k \to \infty$ части [14].

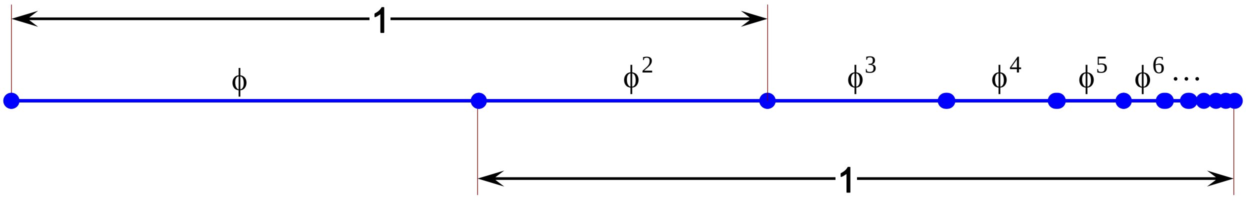

Рис. 2. Единичные конструкции, образуемые степенями малой золотой константы $\phi = \Phi^{-1}$

Подобным свойством обладает ещё только двойка или деление целого пополам (рис. 3).

Если число меньше 0.5, то в бесконечной сумме идет недобор до единицы.

Для большего числа, наоборот образуется перебор. – Что-то вроде карточных игр.

И лишь золотое сечение замечательным образом выделяется из этого правила. За счет своего уникального свойства $\phi+\phi^2=1$, когда сумма числа и его квадрата равна единице.

То есть вторая степень базового числа образуется уже в пределах разбиения целого на две части.

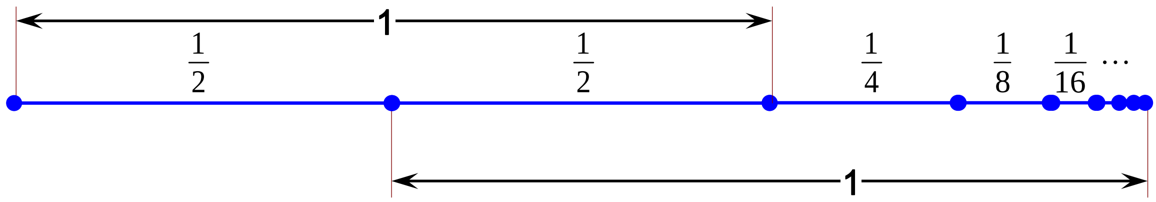

Рис. 3. Единичные конструкции, образуемые степенями двойки

Единство моделей разбиения пополам и в золотой пропорции выражается также в бесконечном суммировании разности и суммы степеней:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi^n-2^{-n}\right)=\phi, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\phi^n-2^{-n}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\phi^n+2^{-n}\right)=\Phi^2=2+\phi, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\phi^n+2^{-n}\right)=\frac{3}{2}.$$

Степени ϕ^k являются меньшими корнями (по абсолютной величине) квадратного уравнения $x^2-L_k x+(-1)^k=0$ или обратной величине большего корня этого же уравнения.

Дополнительные решения

Источником золотого отношения в общем случае является не только радикал $\sqrt{5}$. Целое число "пять" в определенном смысле можно также считать первоисточником золотой константы. Хотя бы на том основании, что имеет место тождество

$$5=(\Phi+\phi)^2=(1+2\phi)^2=1+4\left(\phi+\phi^2\right)=1+4.$$

В этой связи легко составить квадратные уравнения с целыми коэффициентами и максимальным корнем, равным целой степени пяти 5^k, например,

$$\left(x-5^k\right)\cdot(x+d)=x^2-\left(5^k-d\right)x-5^k d=0.$$

Задавая целые величины d и k, получаем алгебраические формы и соответствующие им эквивалентные разностные уравнения (рекурсии), в частности для $k=1$:

$$x^2-4x-5=0 \quad\rightarrow\quad x_{n+1}=4x_n+5x_{n-1};$$

$$x^2-3x-10=0 \quad\rightarrow\quad x_{n+1}=3x_n+10x_{n-1};$$

$$x^2-2x-15=0 \quad\rightarrow\quad x_{n+1}=2x_n+15x_{n-1};$$

$$x^2-x-20=0 \quad\rightarrow\quad x_{n+1}=x_n+20x_{n-1}.$$

Данные уравнения имеют общее свойство: независимо от пары ненулевых начальных условий, все они сходятся к своему аттрактору – "пяти" – в виде предельного отношения соседних членов последовательности.

Любопытный момент. В аддитивной структуре правых частей уменьшение на единицу множителя у слагаемого "сегодня" x_n требует адекватного пятикратного увеличения коэффициента у слагаемого "вчера" x_{n-1}. Только в этом случае между ними образуется паритет в формировании "будущего" x_{n+1}, что в конечном итоге формирует аттрактор 5.

При соблюдении неравенства $d > 5^k$ аттрактор уже не равен пяти.

Поэтому уровень обобщения по сравнению с формами (1)–(2) здесь на порядки ниже, больше тяготея к понятию «золотого островка», как крайне ограниченной совокупности решений, в основе которых лежит золотая константа.

Модель в координатах "хаос – порядок"

В продолжение изложенного материала любопытна одна задача (Hawkes, A104457): «найти два числа такие, что их произведение, разность квадратов и отношение кубов равны друг другу».

Решением является $\{\phi,\ \phi^2\}$ – золотое сечение единицы

$$x \cdot y \ = \ x^2 - y^2 \ = \ \frac{y^3}{x^3} \ \to \ \{\phi,\ \phi^2\}.$$

Если вместо кубов взять обычное отношение чисел, то получим пару

$$x \cdot y \ = \ x^2 - y^2 \ = \ \frac{y}{x} \ \to \ \{1,\ \phi\}.$$

Меньшее в золотом сечении – не только дополнение большего, но и активный "генератор" бесконечного синтеза целого.

Золотоносная система, наравне с двоичной конструкцией, абсолютно приспособлена к самосовершенствованию.

Не случайно, что формирование возможных пропорций из целого и его двух частей $\{1, a, b\}$ приводит лишь к делению пополам $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ либо золотому сечению $\frac{1}{a} = \frac{a}{b}$ – пропорциональному ассиметричному разбиению.

Других вариантов попросту нет. Не считая случаев, когда одна из частей стремится к нулю [15].

Здесь возможны самые разные интерпретации.

Так, разделившись однажды на "зло" и "добро", последнее способно покорить мир. По крайне мере, этим живет большинство человечества.

Условное членение на "хаос" и "порядок" потенциально тяготеет к рекультивации данного отношения, устремлению к стабильному аттрактору и налаженной организации.

С другой стороны, так такового хаоса в действительности нет, да и быть не может.

Это обычные издержки нашего ограниченного мышления, которое не в состоянии охватить всю глубину причинно-следственных связей и отношений. То есть, хаос относится к непознанной и/или в принципе непознаваемой сфере.

Золотое сечение здесь указывает некую условную линию членения или водораздел.

По принципу ассиметричной симметрии, основанной на математической пропорции.

Причем детерминированность составляет примерно 62 %, стохастичность – 38 % (Г. Дульнев).

Если не доводить до крайностей пифагорейскую идею об абсолютизации целых чисел, то практически все потаенные кирпичики и основы материального мира запрятаны в числовых (количественных) закономерностях-отношениях.

Причем не обязательно в виде осязаемых и постоянных структур, допуская вариабельность.

Окружающий нас мир постоянно меняется.

Потому и наличествует быть …

Вместо заключения

Квадратичная модель позволяет выстраивать любопытные конструкции обобщения квадратного уравнения ЗС, например, в предложенном нами виде $x^2 - mL_k x + (-1)^k m^2 = 0$, где $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$ – числа Люка с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2, 1)$.

Уравнение выражает степени золотой константы $\Phi^{\pm k}$, а при желании одновременно и пропорциональное изменение за счет масштабируемого параметра-коэффициента m.

За множеством целочисленных степеней $\Phi^{\pm k}$ вполне могло бы прижиться, например, понятие «семейства золотых степеней».

Исследуемый вариант можно рассматривать как частичную реструктуризацию золотого сечения в направлении от частного к общему.

В данном случае он не выходит за пределы четко ограниченного "золотого" поля и сводится к частичным видоизменениям, как-то: выражению степеней константы ЗС, масштабированию и т.п.

В других случаях, чаще всего происходит коренная ломка структуры ЗС, с переходом на совершенно новое формирование отношений в пропорции и образование иных отличительных конструкций.

Естественно, это требует привлечения своей соответствующей терминологии. Согласно получаемым результатам. И конечно, безо всяких там позолот.

То есть, золотое сечение заканчивается сразу же, как только уходит корень из пяти $\sqrt{5} = \Phi + \phi$. Органичное присутствие именно этой величины в математических формах становится своеобразной визитной карточкой золотого сечения.

С незримым присутствием диагонали $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ прямоугольника 1×2.

Все иные искусственные позолоты с другими квадратичными иррациональностями становятся «как бы обманчивым источником, неверною водою» (Иер. 15:18).

Их участь чрезвычайно проста – введение новых формообразующих терминов.

Понятных, удобоваримых и сообразных. Без ненужных золотых прикрас.

Выводы

Квадратичное уравнение $x^2 - mL_k x + (-1)^k m^2 = 0$ является истинным обобщением золотой модели. Парой своих корней $m\left\{(-\phi)^k,\ \Phi^k\right\}$ оно представляет целочисленные степени золотой константы и её обратного значения с дополнительным произвольным масштабированием через коэффициент пропорциональности m.

Данное подмножество разновидностей квадратного уравнения выражает целые степени золотой константы, носит характер правомерного обобщения и может по праву иметь "золотую" терминологию.

С наличием в решениях квадратного корня из пяти – отчетливого маркера-индикатора золотой константы.

Все другие разновидности квадратного уравнения, в решениях которых наличествуют квадратные корни иных целых чисел, не имеют к золотому феномену никакого отношения.

Несмотря на «магические заклинания золотосеченцев» в их различных вариациях-интерпретациях. Но с одним общим характерным посылом – неутомимой тягой к неправомерному обобщению математической константы, как одному из признаков-симптомов лженауки

Золотая пропорция действительно имеет сугубо квадратичную природу [16, 17].

Но из этого вовсе не следует, что любое квадратное уравнения становится её обобщением.

Само по себе развитие-развертывание золотоносной темы вполне допустимо. Однако с переводом в другую терминологически-понятийную плоскость типа «обобщенной пропорции», без упоминания и запутывания "золотыми" клише.

Благо человеческий язык богат разнообразием, в том числе и своими синонимами.

Равно как и антонимами.

В частности, оперировать <научными> понятиями и жить по понятиям – разные вещи…

Литература

1. Василенко С.Л. Квадратичная модель золотых степеней // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.07.2012. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12132.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 02.08.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=79&sm=2.

2. Василенко С.Л. Квадратичная модель золотых степеней. Часть 2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 19.10.2014. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14178.html.

3. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

4. Владимиров В.Л. О "родовых признаках" обобщенного и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17537, 20.06.2012. – URL: rinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321263.htm.

5. Weisstein E.W. Vieta's Formulas / From MathWorld –A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html.

6. Алфёров С.А. По саду "Золотой пропорции". – URL: sci.aha.ru/ots/alf1.htm.

7. Стахов А.П. Что такое «Математика Гармонии»? // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15358, 22.06.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321125.htm.

8. Бескин Н.М. Деление отрезка в данном отношении. – М.: Наука, 1973. – 64 с. – URL: bookos.org/book/564177.

9. Rabinowitz S. Algorithmic Manipulation of Fibonacci Identities // Applications of Fibonacci Numbers: Proceedings of the Sixth International Research Conference on Fibonacci Numbers and their Applications. – Kluwer Academic, 1996. – P. 389–408.

10. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

11. Василенко С.Л. Золотые триномы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16067, 09.09.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161699.htm.

12. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) / Founded in 1964 by N.J.A. Sloane. – URL: http://oeis.org/.

13. Vajda S. Fibonacci and Lucas numbers and the golden section: theory and applications. – Dover Press, 2008.

14. Василенко С.Л. Золотое сечение-разбиение целого на множество составных частей // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 14.08.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14022.html.

15. Василенко С.Л. Пропорциональное деление целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=108&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 24.11.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13179.html.

16. Василенко С.Л. Квадратичная природа золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16049, 20.08.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161692.htm.

17. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm