Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства.
Часть 9. Недостающие образы

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Число "12" продолжает удивлять своими многочисленными уникальными свойствами и проявлениями. Это дает основание высказывать предположение о нем, как главенствующем формообразующем кирпичике в моделировании-описании мироустройства, включая чисто математические структуры-образования. Расширение исследований и сферы проявления особенностей данного числа представляет несомненный интерес, позволяя выйти на новые качественные ступени в познании окружающего мира.

Мой приятель свободно перемножает
в уме 12-значные числа...
Жаль, пока неправильно.

В нашей работе [1] представлена уникальная широкая подборка многообразных свойств числа "двенадцать".

Они проявляются в теории чисел, геометрии, теории графов и других областях математики. Пронизывают буквально все сферы человеческого бытия.

Проведенные исследования в целом позволяют характеризовать "12" как исключительный феномен мироздания.

Конечно, выделенные особенности и описательные характеристики имеют разный уровень представительства или значимости. Но, так или иначе, они дополняют друг друга, создавая неповторимый колорит и мозаику разноплановых качественных и количественных интерпретаций.

- **Любовь природы к малым числам и конкретно к 12.** В цифровых комбинациях чисел известен закон Бенфорда [2] или закон первой цифры.

Он характеризует возможность того, что случайное целое число начнется с цифры "1" или с любой другой цифры. Арабских цифр девять, поэтому, на первый взгляд, теория вероятности даёт всем одинаковый шанс – один к девяти, или порядка 11 %.

В действительности число "9" встречается гораздо реже. Зато почти треть чисел начинается с единицы. Такая парадоксальная картина проявляется в самых разных реальных ситуациях: от протяженности рек до населения и площадей стран мира [3].

На эту закономерность впервые профессионально обратил внимание физик Фрэнк Бенфорд (1938). Он обнаружил, что частота появления цифры в качестве первой падает по мере того, как цифра увеличивается от одного до девяти.

В качестве первой цифры единица появляется примерно в 30,1 % случаев, двойка – в 17,6 % случаев, тройка – примерно в 12,5 %, и так далее до девятки, которая выступает первой цифрой только в 4,6 % случаев.

Чтобы понять, как это происходит, будем последовательно нумеровать, например, лотерейные билеты.

Сначала в девяти билетах любая цифра имеет равную возможность ~11,1 %.

Добавим следующий билет № 10. Теперь шанс случайного числа начаться с единицы возрастает до 18,2 %.

Приобщаем билеты №№ 11–19. Вероятность того, что номер билета начнётся с "1", продолжает расти, достигая максимума в 58 %.

Дорисуем билет № 20 и продолжим нумерацию билетов. Шанс того, что число начнётся с "2", растёт, а для "1" – медленно падает. И так далее.

Закон Бенфорда распространяется не на все варианты распределения чисел.

Например, наборы множества чисел с ограниченным диапазоном и/или подчиняющихся нормальному распределению (человеческий рост, вес), под закон не попадают.

Он не годится и для множеств, которые имеют только один или два порядка.

Тем не менее, закон свойственен многим типам данных, что дает возможность чистую математику использовать в прикладной сфере. Например, его можно применять для выявления мошенничества: если предоставленная информация не отвечает описанному закону, то данные, скорее всего, подтасованы.

Вероятность или относительная частота появления на первом месте десятичных знаков $d = 1, 2, \ldots, 9$ определяется по формуле десятичного логарифма $p(d) = \log(1 + d^{-1})$.

Для нас важен иной аспект, который вытекает из логики закона Бенфорда при условии неповторяющихся начальных цифр в десятичной системе счисления:

большинство чисел начинается с 12.

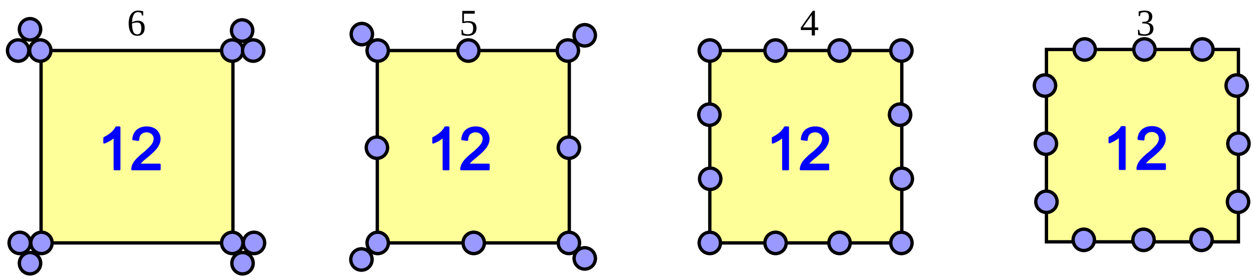
В этом сочетании цифр 1 и 2 просматривается особая магия и неповторимое волшебство. Но есть приземленное физическое объяснение: маленькие предметы в мире всегда преобладают среди своих собратьев. Маленьких озер всегда больше, чем крупных, высоток меньше, чем одноэтажных домов.

Незначительные аварии на дорогах случаются чаще, чем серьезные.

В бухгалтерии чаще проводятся мелкие суммы, чем крупные.

И подобных примеров тысячи.

- **«Часовые должны стоять на расстоянии вытянутого выстрела друг от друга»** (из армейского фрик-устава). Расстановка минимального контингента часовых вдоль стен квадратного бастиона: по 6, 5, 4 и 3 человека с каждой стороны приводит к числу 12.



Возможные различия определяются количеством постовых (выделено жирным) на четырех угловых башнях с последующим распределением остальных воинов на стенах:

$$\mathbf{3} \times 4 = 12;$$

$$\mathbf{2} \times 4 + 1 \times 4 = 12;$$

$$\mathbf{1} \times 4 + 2 \times 4 = 12;$$

$$\mathbf{0} \times 4 + 3 \times 4 = 12.$$

В итоге имеем две пары симметричных решений с адекватным перемещением часовых с четырех углов на четыре стены.

- **Делители.** Число 12 имеет собственные делители 2, 3, 4, 6, 12. При низком уровне вычислений в древности это давало большие преимущества.

Основание одновременно не слишком велико и содержит большое число делителей. Число очень удобно для счета: его можно без остатка делить на 2, 3, 4 и 6.

Так что по всем канонам должна была сложиться двенадцатеричная система счисления.

Об этом свидетельствует построение-наименование чисел.

Так, в английском языке для 11 и 12 имеются свои отдельные слова: "eleven", "twelve". А далее построение за счёт одинаковых добавлений к числам-цифрам.

"Двенадцать" – *twelve* являет собой наибольшее число с 1-морфемным именем или грамматической единицей языка, как остаточные явления 12-ричного счета.

Для 10 и 11 должны быть свои цифры-символы. Тогда основной 12-ричный цифровой звукоряд мог бы выглядеть примерно таким образом: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 C V.

Однако исторически возобладала арабская 10-ричная система счисления, которой пользуемся до сих пор.

Преимущества 12-ричной системы становятся яснее, когда мы видим, что число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6. Очень удобно дробить такое число, когда $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ его становятся целыми числами – en.wikipedia.org/wiki/Duodecimal.

Таблица умножения в 12-ричной системе образует плавную "гиперболу" на число 12:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Число 12 вошло во многие системы счета. Так, в ряде стран считали дюжинами (дюжина – 12 штук). Английский фут равен 12 дюймам, шиллинг – 12 пенсам и т.п.

"Удобоваримость" этого числа сказалось и в религиях. Так, у Христа и Будды, было 12 последователей – учеников. И так далее.

- **Свойства-взаимоотношения делителей.** Делители 2, 3, 4, 6, 12 числа 12 связаны между собой любопытными соотношениями через средние величины:

  - $4 = \dfrac{2+6}{2}$ – среднее арифметическое чисел 2 и 6 – их сумма, деленная пополам;
  - $4 = 2\dfrac{3 \cdot 6}{3+6}$ – среднее гармоническое чисел 3 и 6 – удвоенное произведение чисел, деленное на их сумму;
  - $6 = \sqrt{3 \cdot 12}$ – среднее геометрическое чисел 3 и 12 – квадратный корень из их произведения.

• **Сумма и произведение чисел.** Пусть сумма трёх чисел, отличающихся последовательно друг от друга на единицу, равна их произведению.

Для удобства вычислений запишем уравнение в следующем виде:

$$(z-1)+z+(z+1)=(z-1)\cdot z\cdot(z+1).$$

Или $z^3=4z$.

Отсюда имеем три целочисленных решения z: 0, –2, 2.

То есть три тройки целых чисел: (–1, 0, 1), (–3, –2, –1) и (1, 2, 3).

В области натуральных (целых положительных) чисел решение поставленной задачи единственно с начальным числом $x=z-1=1$:

$$\mathbf{1+2+3=1\times 2\times 3}.$$

Примечательно, что сумма шести чисел в этом простом уникальном равенстве равна **12**.

Есть ещё одно замечательное свойство: три числа (1, 2, 3) составляют единственную среди натуральных чисел группу, в которой два простых числа (2 и 3) расположены рядом.

• **От двенадцати к золотому сечению.** Не менее интересна аналогичная постановка задачи для двух отличающихся на единицу чисел, сумма которых равна их произведению.

Это приводит нас к константе *золотого сечения* (ЗС):

$$x+(x+1)=x\cdot(x+1) \quad\to\quad x^2-x-1 \quad\to\quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=(-\phi,\Phi),$$

$$\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618;\qquad \phi=\Phi^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618.$$

Действительно,

$$\left(\Phi,\Phi+1=\Phi^2\right)\quad\to\quad \Phi+(\Phi+1)=\Phi^3;$$

$$\left(-\phi,-\phi+1=\phi^2\right)\quad\to\quad -\phi+(-\phi+1)=-\phi^3.$$

Таким образом, константа ЗС – единственное действительное число > 0, которое будучи увеличенное на единицу, образует редчайшую пару: сумма чисел равна их произведению.

Расширение-обобщение данной проблематики на четыре числа и более приводит к алгебраическим уравнениям, которые не имеют аналитического решения, а корни находятся лишь численными методами (табл. 1), например,

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=x(x+1)(x+2)(x+3),$$

$$x\approx 0{,}573272.$$

Таблица 1

Группы вещественных чисел, последовательно отличающихся на единицу, сумма которых равна их произведению

Количество чисел	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Первое число	$\Phi\approx 1{,}618$	1	0,573272	0,278724	0,103536	0,027530

• **Сумма-произведение целых чисел.** Видоизменим условие предыдущей задачи, ограничившись произвольными натуральными числами, сумма которых равняется их произведению.

Иначе говоря, результат арифметических действий не изменится, если между числами знак сложения заменить знаком умножения.

Для двух чисел имеет место знаменитое свойство двойки: $2 + 2 = 2 \times 2$.

Три числа с данным свойством дают упомянутое равенство $\mathbf{1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3}$.

Из четырёх чисел получается только одна форма: $1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$.

Из пяти чисел образуется три формы:

$$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5,$$
$$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3,$$
$$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Как видно, только "тройное" равенство содержит разные числа, причем подряд идущие.

Мало того, их сумма равна **12**.

В этом и состоит вся прелесть редкостных 12-дюжинных свойств. Описанной особенностью не обладает ни одно другое натуральное число.

- **Задача Томсона:** разместить n одинаковых заряженных точек на сфере, чтобы потенциальная энергия системы (сумма парных обратных расстояний между точками) была минимальна [4]. Иначе говоря, к каким расположениям на сфере будут стремиться одинаковые заряды, пытаясь минимизировать потенциальную энергию системы, образуя состояние равновесия? – На сегодня это открытая (нерешённая) математическая проблема (etudes.ru/ru/etudes/tomson/). Задача строго обоснована только для $n = 2, 3, 4, 6, 12$ – именно для делителей числа 12! Скорее всего, это и есть окончательное решение, ибо прошло уже более века после постановки задача Томсона в трёхмерном пространстве.

Два электрона разносятся в диаметрально противоположные точки-полюсы.

Три электрона располагаются на большой окружности сферы в вершинах правильного треугольника.

Четыре электрона соотносятся с вершинами правильного тетраэдра. При $n = 2, 3, 4$ в экстремальной конструкции все парные расстояния между электронами одинаковы.

Для доказательства экстремальности приведенных конфигураций можно воспользоваться классическими неравенствами о трёх средних: арифметическом, геометрическом и гармоническом. При оценке снизу потенциальной энергии системы, эти неравенства дают точные оценки, обращаясь в равенства на экстремальных конструкциях.

Шесть электронов занимают вершины правильного октаэдра. Эту конфигурацию можно мыслить как точки пересечения осей координат трёхмерного пространства со сферой.

Двенадцать электронов рассредоточиваются в вершинах икосаэдра – правильного многогранника с 20 треугольными гранями и 12 вершинами.

Для справки. Английский физик Джозеф Джон Томсон (1856–1940) – лауреат Нобелевской премии за экспериментальное открытие электронов (1906). Семеро его учеников также стали лауреатами Нобелевской премии.

Научно-популярное изложение и доказательство задачи для $n = 6, 12$ заряженных точек можно найти в работе [5].

Задача формализуется согласно закону Кулона для единичных зарядов $q_i = 1,\ i = \overline{1, n}$:

$$W(n) = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|a_i - a_j|} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|a_i - a_j|} \to \min ,$$

где в знаменателе – расстояние между точками a_i и a_j, то есть длина отрезка, соединяющего эти точки.

В частности, для единичной сферы минимальная энергия системы из 6 и 12 зарядов составляет:

$$W(6) = 3 + 12\sqrt{2};$$

$$W(12) = 6 + 15\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 15\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Обратим внимание на любопытный факт вновь появившейся связи, пусть и косвенной, числа 12 и константы ЗС. Эта связь вытекает из последнего равенства на том основании, что сумма двух золотых (обратимых) констант равна квадратному корню из пяти $\Phi + \phi = \sqrt{5}$.

- **Задача для чайников (из дорогого сервиза).** Известна занимательная задача с применением числа 12 на сообразительность и умение логически мыслить [6 , с. 11]:

«Двенадцать человек несут 12 хлебов: каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина – по половине хлеба, а ребенок – по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей»?

Решение. Мужчин было менее 6, иначе не нужно было загружать остальных людей. Также их было больше 4, в противном случае они унесли бы 8 хлебов. Тогда оставшиеся 4 хлеба несут 8 человек по 0,5 на каждого, а именно женщины, тогда как часть хлеба несли дети. Таким образом, 5 мужчин несли 10 хлебов.

Оставшиеся 2 хлеба несли женщины и дети, всего 7 человек. Пусть было x женщин и $7 - x$ детей. Составляем уравнение: $0{,}5x + 0{,}25(7 - x) = 2$, откуда $x = 1$.

Итак, было 5 мужчин, 1 женщина и 6 детей: $5 \cdot 2 + 1 \cdot 1/2 + 6 \cdot 1/4 = 12$.

- **«Пятизвездочные числа».** Имеется ровно 12 пятизначных чисел *abcde* таких, что произведение чисел *ab* и *cde* даёт новое число, состоящее из тех же самых цифр [7, с. 265] (все цифры различны и среди них нет нуля):

14926	→	14 × 926 = 12964;
24651	→	24 × 651 = 15624;
42678	→	42 × 678 = 28476;
51246	→	51 × 246 = 12546;
57834	→	57 × 834 = 47538;
65281	→	65 × 281 = 18265;
65983	→	65 × 983 = 63895;
72936	→	72 × 936 = 67393;
75231	→	75 × 231 = 17325;
78624	→	78 × 624 = 48672;
86251	→	86 × 251 = 21586;
87435	→	87 × 435 = 37845.

- **12 и пифагорова тройка** – упорядоченный набор из трёх натуральных чисел (a, b, c), которые удовлетворяют однородному квадратному уравнению $a^2 + b^2 = c^2$, отражающему теорему Пифагора для прямоугольных треугольников в целых положительных числах. Тройка называется примитивной, если числа (a, b, c) – взаимно простые. Обычно они упорядочены по мере нарастания гипотенузы c.

Первый случай совпадения площадей примитивных пифагоровых троек появляется на двух триплетах (**12**, 35, 37), (20, 21, 29), где **12** – *длина минимального катета*:

$$0{,}5 \times (12 \times 35 = 20 \times 21) = 210.$$

Следующие пары триплетов для общего сведения (A024407, http://oeis.org):

(60, 91, 109), (28, 195, 197) – 2730;

(95, 168, 193), (40, 399, 401) – 7980;

(341, 420, 541), (132, 1085, 1093) – 71610.

Наименьшая известная площадь для трёх пифагоровых триплетов имеет вид:

(4485, 5852, 7373), (3059, 8580, 9109), (19019, 1380, 19069) с площадью 13123110.

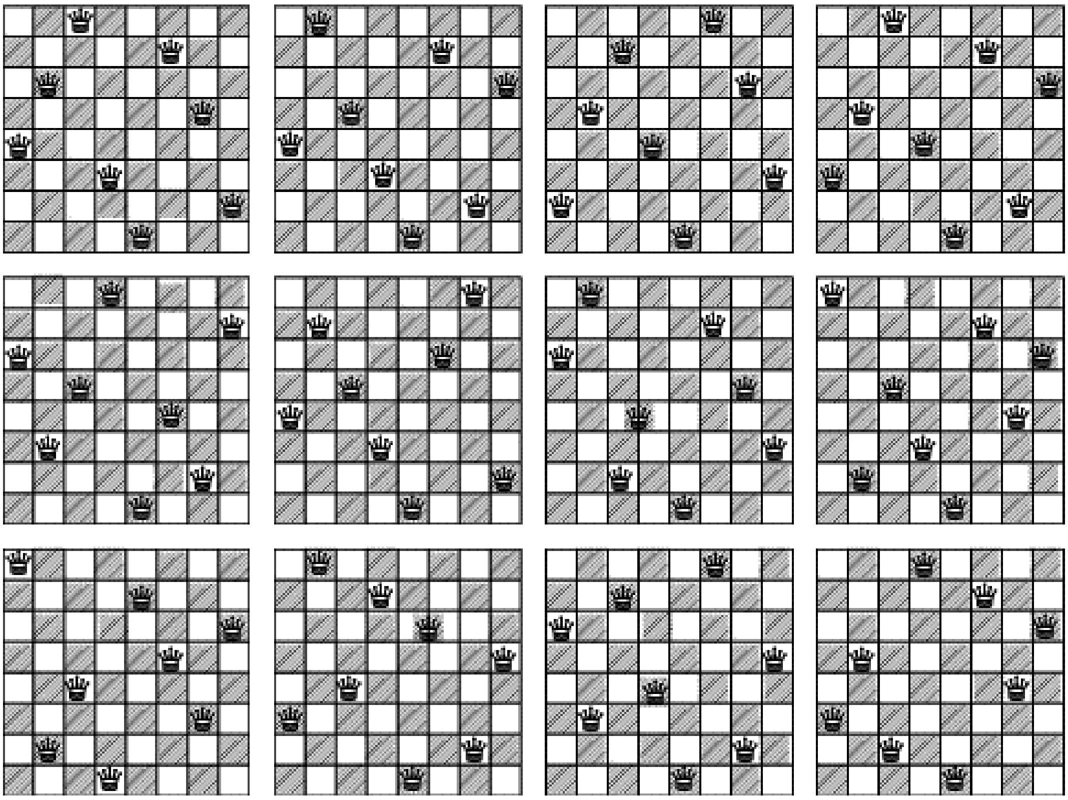
Итак, **12** – *минимальное число из пифагоровых троек*, допускающих равновеликость соответствующих прямоугольных треугольников.

- Ферзь (королева *queen*) – самая сильная шахматная фигура, перемещающаяся на любое число полей по вертикали, горизонтали и диагонали. Известная задача "О восьми ферзях" [8] имеет в точности **12** (!) фундаментальных решений.

Общее количество расстановок, чтобы ни один из ферзей не находился под боем другого на стандартной 64-клеточной доске 8×8, составляет 92 решения с учетом преобразований симметрии: отражения от вертикальной и горизонтальной осей, отражения от диагоналей доски и поворотов на 90,180 и 270 градусов.

«Существенных решений (не совпадающих при отражениях и поворотах доски) имеется только 12» [9, с. 46].

То есть, если решения, отличающиеся только действиями симметрии (вращения и зеркального отражения относительно линий, разделяющих доску пополам), считать как одно, то головоломка сводится только к **12** решениям, например (по клеткам слева направо):
(4 6 8 3 1 7 5 2), (4 8 5 3 1 7 2 6), (2 5 7 4 1 8 6 3), (3 5 8 4 1 7 2 6), (6 3 5 8 1 4 2 7), (4 7 5 3 1 6 8 2), (6 8 2 4 1 7 5 3), (8 2 5 3 1 7 4 6), (8 2 4 1 7 5 3 6), (3 8 4 7 1 6 2 5), (6 3 7 4 1 8 2 5), 3 5 2 8 1 7 4 6)



Остальные 80 расстановок получаются из этих двенадцати при помощи поворотов и отражений доски [9].

Количество расстановок ферзей на поле *n*×*n* образует последовательность A002562: 1, 0, 0, 1, 2, 1, 6, **12**, 46, 92, 341, 1787, 9233, 45752, 285053, 1846955, 11977939...

- 12 – наименьшее избыточное число (A005101, *abundant or excessive number* – mathworld.wolfram.com/AbundantNumber.html).

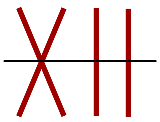
Это натуральное число *n*, сумма положительных собственных делителей которого (отличных от *n*) превышает *n*: $s(n) = \sigma_1(n) - n > n$, где $\sigma_1(n)$ – функция делителей (сумма всех делителей), $s(n)$ – аликвотная сумма: $1+2+3+4+6=16>12$.

К слову, наименьшим нечетным избыточным числом является 945.

Л. Шнирельман доказал, что любое натуральное число, большее 28123, можно представить в виде суммы двух избыточных чисел.

Заметим, что данное число 28123 составляет количество отдельных позиций, которые могут возникнуть после 7 ходов в шашки на 64-клеточной доске – числовая последовательность A133047 (http://oeis.org).

Более того, число 12 возглавляет последовательность A047802: **12**, 945, 5391411025, 20169691981106018776756331, 9061132957714428902152118459264865645885092682687973... – наименьшее избыточное число, которое не делится на любое из первых *n* простых чисел:
$945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ – не делится на 2;
$5391411025 = 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$ не делится на 2, 3;
$20169691981106018776756331 = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67$ не делится на 2, 3, 5.



- Число двенадцать можно на бумаге разделить на две равные части так, чтобы половина этого числа была семь. Для этого достаточно написать число двенадцать римскими цифрами XII и разделить горизонтальной чертой пополам. В верхней части получится VII – римская цифра 7.

- В пределе сотни имеем 12 чисел, кратных $2^3 = 8$, а именно: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96.

- Двенадцать – единственное число в десятичной системе счисления, не считая своего зеркального отражения 21, для которого сумма и произведение цифр являются простыми числами (3 и 2), – без повторяющихся единиц.

Действительно, любое другое число не должно содержать четных цифр (2, 4, 6, 8), девятки $9 = 3 \cdot 3$, а также повторяющихся нечетных цифр (3, 5, 7). С повторением единиц ситуация несколько иная. Так, числа типа 113, 11113, 511, 11711 и многие другие удовлетворяют исходным условиям, если не ограничить повторение цифры 1.

- Весьма любопытны табличные (магические) расстановки-комбинации чисел:

–4	**–5**	**5**	**4**	**0**		**3**	**7**	**2**	**12**
3	**6**	**–3**	**–6**	**0**		**8**	**O**	**4**	**12**
1	**–1**	**–2**	**2**	**0**		**1**	**5**	**6**	**12**
0	**0**	**0**	**0**			**12**	**12**	**12**	

Магический прямоугольник $3 \times 4 =$ **12**, А. Альфабет

Магическое кольцо из начальных натуральных чисел: суммы строк, столбцов и угловых ячеек равны **12**

- Из любых пяти одинаковых цифр (кроме цифры 0) можно одним и тем же способом получить число 12 – по форме $(nn:n)+(n:n)$. Например, $(55:5)+(5:5)=12$.

- $12=2^2+2^3=3^1+3^2$ – наименьшее число, которое допускает два представления в виде суммы одинаковых оснований со степенью ≥ 1, не равных одновременно 1.

Другие варианты: $30=3^1+3^3=5^1+5^2$, $130=2^1+2^7=5^1+5^3$, $252=3^1+3^5=6^2+6^3$, $320=4^3+4^4=3^4+3^5$... Одинаковые единичные степени приводят к тривиальным решениям для четных чисел типа $20=10^1+10^1$.

- Число **12** можно записать четырьмя одинаковыми цифрами:

$$12 = 11\cdot1+1 = (2\cdot2+2)\cdot2 = 3+3+3+3;$$

$$12 = (11+1):1 = (22+2):2 = (33+3):3 = (44+4):4 = (55+5):5 =$$
$$= (66+6):6 = (77+7):7 = (88+8):8 = (99+9):9.$$

- **12** – число фигур с каждой стороны в настольной игре "шашки" на $8\times8=64$-клеточной доске: английские (чекерс), армянские, испанские, русские, "пьяные" и др.

- Канадские шашки – вариант одного из крупнейших вариантов настольной игры на $12\times12=144$-клетчатой доске с 30 игровыми элементами для каждого игрока.

- **12** – максимальное число на косточке обычного домино 6 / 6.

- **Правильные и полуправильные тела.** Правильный многогранник (платоново тело) – это выпуклый многогранник, состоящий из одинаковых правильных многоугольников и обладающий пространственной симметрией.

В трёхмерном евклидовом пространстве их всего пять. Из них четыре (кроме тетраэдра) имеют 12- *индексную структуру* (наш термин – означает наличие у тела двенадцати вершин, ребер или граней):

икосаэдр – 12 вершин, октаэдр и куб – 12 ребер, додекаэдр – 12 граней.

Полуправильные многогранники имеют некоторые признаки правильных.

К ним, в частности относятся архимедовы тела – выпуклые многогранники, обладающие двумя свойствами: все грани являются правильными многоугольникам двух или более типов, для любой пары вершин существует симметрия, переводящая одну вершину в другую, в частности, все многогранные углы при вершинах конгруэнтны.

Двойственные архимедовым телам – каталановы тела имеют конгруэнтные грани, равные двугранные углы и правильные многогранные углы.

То есть грани архимедовых тел – правильные, но не одинаковые многоугольники, грани каталановых тел – одинаковые, однако, не являются правильными многоугольниками.

При этом для всех этих тел сохраняется условие одного из типов пространственной симметрии: тетраэдрического, октаэдрического или икосаэдрического.

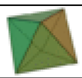
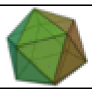
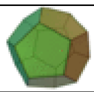
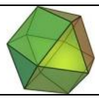
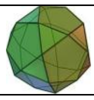
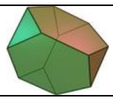
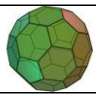
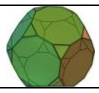
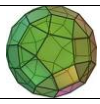
Множество архимедовых тел имеет 12-развернутую структуру по схеме 12 = 11+1: 11 амфихиральных тел + подмножество хиральных тел [1].

Последнее включает обособленную пару тел: скошенный куб (*Snub cube,* $32_3 6_4$) и скошенный додекаэдр (*Snub dodecahedron,* $80_3 12_5$), которые являются хиральными (др.-греч. *рука*). Они не являются зеркально-симметричными, имея левую и правую формы. То есть само тело не совпадает со своим зеркальным отображением, то есть не может быть совмещено с ним только вращениями и параллельными переносами.

Таким образом, имеем в точности **двенадцать 12-индексных** платоновых и архимедовых тел с зеркальной симметрией (табл. 1).

Таблица 1

Двенадцать
12-индексных платоновых и архимедовых тел с зеркальной симметрией

№ п/п	Изображение	Наименование	Грани[1]	Вершины	Ребра	Тип симметрии
			Г + В = Р + 2			
		Платоновы тела				
1		Октаэдр	8_3	6	**12**	O_h
2		Икосаэдр	20_5	**12**	30	I_h
3		Гексаэдр или куб	6_4	8	**12**	O_h
4		Додекаэдр	$\mathbf{12}_5$	20	30	I_h
		Архимедовы тела				
5		Кубооктаэдр	$8_3 6_4$	**12**	24	O_h
6		Икосо-додекаэдр	$20_3 \mathbf{12}_5$	30	60	I_h
7		Усеченный тетраэдр	$4_3 4_6$	**12**	18	T_d
8		Усеченный икосаэдр	$\mathbf{12}_5 20_6$	60	90	I_h
9		Усеченный додекаэдр	$20_3 \mathbf{12}_{10}$	60	90	I_h
10		Ромбоикосо-додекаэдр	$20_3 30_4 \mathbf{12}_5$	60	120	I_h
11		Ромбо-усечённый кубооктаэдр	$\mathbf{12}_4 8_6 6_8$	48	72	O_h
12		Ромбо-усечённый икосододекаэдр	$30_4 20_6 \mathbf{12}_{10}$	120	180	I_h

Примечание: [1] – запись n_m означает n правильных m-угольников.

Естественно, сюда не вошли архимедовы тела (грани, вершины, рёбра):

усеченный октаэдр – $6_4 8 0_6$ 24 28;
усеченный куб – $8_3 6_8$ 24 36;
ромбокубоктаэдр – $8_3 18_4$ 24 48;
скошенный куб – $32_3 6_4$ 24 60;
скошенный додекаэдр – $80_3 12_5$ 60 150.

• **Двенадцатигранники.** Конечно, самый знаменитый здесь додекаэдр – платоново тело с 12 правильными пятиугольниками. Последние не могут покрыть плоскость без зазоров. Соответственно додекаэдрами нельзя плотно заполнить 3-мерное пространство.

Из этого следует невозможность существования кристаллов с осями симметрии пятого порядка, равно как и кристаллов в форме платоновского додекаэдра.

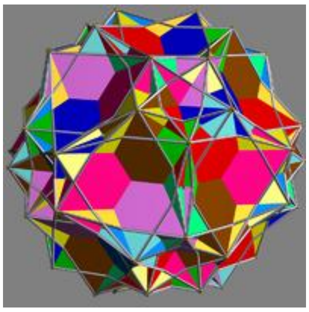
Однако, известны вирусы и белки в форме додекаэдра с осями симметрии пятого порядка. Полагают, что они приобрели такую форму во избежание кристаллизации.

Из каталоновых 12-гранные формы имеют:

ромбододекаэдр – 12 ромбов, двойственен кубооктаэдру;

триакистетраэдр – 12 тупоугольных треугольников, двойственен усеченному тетраэдру.

Пентагондодекаэдр содержит 12 неправильных пятиугольников, симметричных относительно плоскости, проходящей через центр фигуры. Это одна из простых форм кристаллов. Такая огранка характерна, например, для пирита (железного колчедана). Является переходной формой между кубом и ромбододекаэдром. Имеет тетраэдрическую группу симметрии.



Известен также единый многогранник, который является соединением 12 симметрично расположенных пентаграмных антипризм (compound of twelve pentagrammic antiprisms).

Они выровнены в парах с осями симметрии пятикратного вращения додекаэдра.

Антипризма – полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани-основания – равные между собой правильные n-угольники, остальные 2*n* боковых граней – правильные треугольники.

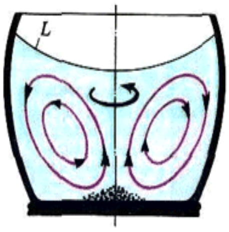
Он имеет абсолютную 12-счетную систему главных параметров: 144=12·12 грани, в том числе 120=12·10 треугольников и 24=12·2 пятиугольника, 240=12·20 углов и 120=12·10 рёбер.

Подобно этому образуется соединение из двенадцати пентагональных призм (compound of twelve pentagonal prisms)

Многогранное тело также имеет 12-счетную систему параметров:

84=12·2 грани, в том числе 24=12·2 пятиугольника и 60=12·5 квадратов, 180=12·15 углов и 60=12·5 рёбер.

• **Чай Эйнштейна.** В литературе [10, 11] можно найти описание любопытной задачи: если с помощью ложки привести во вращение жидкость в чашке, то чаинки собираются в центре дна сосуда, а не разбегаются по краям.



Простой на вид опыт оказывается чрезвычайно сложным по своей природе, имея множество различных вариаций.

Их интерпретация усложнена, поскольку точного расчёта движения чаинок, по всей видимости, пока не существует.

Возможны такие варианты проведения опыта с чаинками [12]:

1) фиксировать их положение во время вращения или после него;

2) раскручивать чай или стакан;

3) наблюдать за придонными, поверхностными либо плавающими внутри объема частицами.

Всего $2\times2\times3=\mathbf{12}$ основных комбинаций.

- **Химия.** 12 – координационное число (КЧ) для гексагональной плотноупакованной структуры. В химии и кристаллографии определяет число ближайших соседних одинаковых частиц (ионов, атомов) в молекуле или кристалле.

Прямые линии, соединяющие центры ближайших частиц, образуют координационный многогранник. Характерно для некоторых металлов *Cu, Au* и др., многогранник – кубооктаэдр.

- **Физика.** Число (константа, постоянна) Авогадро – физическая величина, численно равная количеству специфицированных структурных единиц (атомов и др. частиц) в одном моле вещества. Определяется количеством атомов в 12 граммах (точно) чистого изотопа углерода-12.

- **Интернет-популярность 12.** Проведем несложный эксперимент в части оценки популярности в использовании чисел, которые известны многим людям.

Например, на основе статистики распространенных поисковых систем.

В качестве исходной гипотезы принимается следующая теза: чем больше поисковых запросов с названием числа задают люди, тем более знаменито само число.

В результате приходим к следующей градации:

- константа золотого сечения – Ф;
- число пи – π;
- число Эйлера – *e*;
- числа Фибоначчи во всей своей совокупности;
- дюжина или 12.

Таким образом, среди одиночных натуральных чисел наиболее популярным у современных пользователей Интернет, оказывается **12**.

Вместо заключения или оптимальный баланс.

На наш взгляд, в бесконечном натуральном ряде число 12 занимает оптимально-гармоничное положение.

Единице несет наибольшую скорость информацию, но одновременно ей свойственна и единица информации.

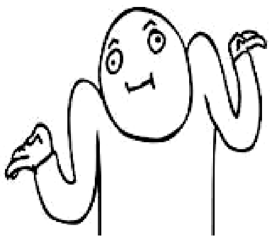
Бесконечность наоборот несет всю полноту информации, но со скоростью равной нулю.

Число 12 в этом контексте имеет оптимальное сочетание соотношения «скорость–информация».

К слову, в индийской мистической традиции тринадцать – число, после которого надлежит прекратить счет, ибо вещи человеческие исчислимы цифрами от одного до дюжины, вещи же сверхъестественные начинаются с тринадцати, но они непостижимы.

Нелюбовь к числу 13 характерна для большинства стран Европы, особенно христианских культур.

Возможно, это связано с сакральным смыслом числа 12.



P.S. или З.Ы. по-русски.

Что есть, то есть. – В итоге имеем 13 страниц текста.

Однако специально менять уже ничего не хочется.

Давайте просто начнем их новую нумерацию ... с нуля.

Почему бы и нет... Один-то разок!

Литература:

1. Василенко С.Л. "Двенадцать" в основаниях мироустройства // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 07.08.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11264.html / Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Часть 7. Размышлизмы об истоках. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15268.html / Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Часть 8. Степенные особенности. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15299.html.
2. Закон Бенфорда. – URL: ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Бенфорда, publy.ru/post/10466#5.
3. Арнольд В.И. Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира // Квант. – 1998. – № 1. – С. 2-4. – URL: kvant.mccme.ru/1998/01/index.htm.
4. Юдин В.А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная математика. – 1992. – Т. 4, вып. 2. – С. 115-121.
5. Андреев Н.Н. Экстремальное расположение точек на сфере / Н.Н. Андреев, В.А. Юдин // Математическое просвещение. – 1997. – Вып. 1. – С. 115-121. – URL: math-lab.ru/thomson/n=6_12.pdf.
6. Олехник С.Н. Старинные занимательные задачи / С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 160 с.
7. Дьюдени Г.Э. Кентерберийские головоломки. – М.: Мир, 1979. – 351 с.
8. Задача о восьми ферзях. – URL: en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle, URL: mathworld.wolfram.com/QueensProblem.html.
9. Гик Е.Я. Шахматы и математика. – М.: Наука, 1983. – 176 с. – URL: ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/chess.htm.
10. Бурлаки Н. Опыты с вращающейся жидкостью // Квант. – 1992. – № 2. – С. 42-46. – URL: kvant.mccme.ru/1992/02/index.htm.
11. Василенко С.Л. Водные парадоксы. Часть 3 // Водопостачання та водовідведення. – 2013. – № 5. – С. 59-63. – URL: waterwork.org.ua/ru/2013/91-5-2013.
12. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 163, № 3. – С. 299-330.

Харьков, Украина

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html