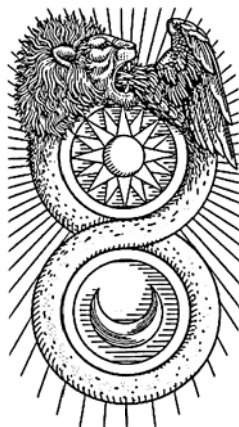


Денис Клещев

Некоммутативная алгебра знаков:

всегда ли «минус» на «минус» равно «плюс»?



Солнце и Луна, соединяясь в бесконечности Уробороса, позволяют Льву поглотить часть собственного духа — горделивого Орла, от которого остаются лишь крылья. (Алхимический символ).

Всем известны правила действий со знаками «+» и «-», а именно то, что при перемножении «-» на «-» получается «+», а при перемножении «-» на «+» получается «-». Эти правила кажутся нам привычными и понятными, но всегда ли с их помощью мы можем адекватно описывать события реальности? Не приводит ли эта привычка к тому, что бездумное применение формальных правил мешает нам понимать суть процессов, которые происходят на самом деле? Оказывается, окружающая нас действительность намного разнообразнее привычного математического формализма, в ней разрешены события, которые не укладываются в общепринятые операции со знаками.

Долгое время мнимые числа вроде $\sqrt{-1}$ в математике считались совершенно бессмысленными, ведь нельзя получить -1 при возвышении в квадрат двух одинаковых чисел: $+1 \cdot +1 = +1$, точно так же, как $-1 \cdot -1 = +1$. Однако реальные потребности счета в науке давно вышли за рамки узкого формального подхода, и сегодня никого не удивит исчислением кватернионов и всякого рода мнимостей. Но что означает само употребление в математике мнимых чисел? Разве это не свидетельство тому, что мнимости перестали быть бессмысленными выражениями, разве это не подразумевает возможность выполнения таких операций со знаками, которые в явном виде не постулируются, но которые *de facto* давно используются нами? Попытаемся с этим разобраться.

Пусть число $\sqrt{-c}$ означает невозможность обретения некоторого предмета, например, потому, что сама природа этого предмета невещественна. Мы можем нарисовать знак бесконечности ∞ , но саму Бесконечность мы нарисовать не можем. Знак, который мы условно называем «бесконечность», конечен по форме. Даже провести или повторить его бесконечное количество раз мы не в состоянии — ни у кого на это не хватит жизни. Иначе говоря, такого человека *не существует*. Итак, мы получили парадокс: *не-форма* помноженная на *не-сущее* дает нам абстрактный предмет «бесконечность», и этот предмет, вернее наше знание о нем, обладает отрицательным предикатом (*без-конечность* = *не-ограниченность*).

Выходит, наше сознание смоделировало ситуацию, такую что $-a \cdot -b = -c$. Это возможно только при условии, что само сознание может ассоциировать себя с *не-формой*, *не-сущим* и *без-конечным*, так что и то, и другое, и третье оказывается в действительности одним невещественным сознанием (-1) или $-1 \cdot -1 = -1$. Таким образом, мнимое число $\sqrt{-1}$ обрело вполне определенный смысл. При этом привычная алгебра знаков оказалась нарушена. Но она оказалась нарушена лишь для системы утверждений, в которой не рассматривается феномен сознания, подобно тому, как в трехмерном евклидовом пространстве не рассматривается четвертое измерение времени.

Полностью обосновать использование мнимых чисел можно только в системе взглядов, учитывающих явление сознания. Однако подобные философские размышления могут показаться неубедительными. В наш век двойных стандартов и вопиющего цинизма никто не относится к философии серьезно, потому что технологии

позволяют быстро копировать информацию, создавать огромный массив данных и влиять на разумы людей, нисколько не заботясь о смысловой достоверности. Если до появления «новых масс-медиа» информационное поле еще могло видоизменяться за счет *качества* информации, то теперь стало достаточно одного *количества*. Другими словами, интенсивное развитие научно-технического прогресса сменилось экстенсивным развитием *hi-tech*, за которым уже виднеется призрак упадка глобальной экономики постмодернизма.

Тоталитарный контроль над информационными ресурсами со стороны США позволяет им представлять бандитов и воров доблестными борцами за свободу и демократию, а тех, кто пытается спасти свой собственный народ от геноцида, — сумасшедшими, угрожающими всему миру. Бывших легионеров СС и необандеровцев, призывающих во время факельных шествий убивать русских, США и Евросоюз изображают такими «мирными демонстрантами», а Путина изображают «Гитлером, мечтающим захватить всю Европу». Всего лишь за то, что он не испугался введения международных санкций, признав независимость Крыма и прямое волеизъявление крымчан о воссоединении с Россией. Мы воочию убедились в том, что США не только поддерживают идеологию фашизма, но являются подлинными творцами «железного занавеса», в создании которого они так истерично обвиняли Советский Союз.

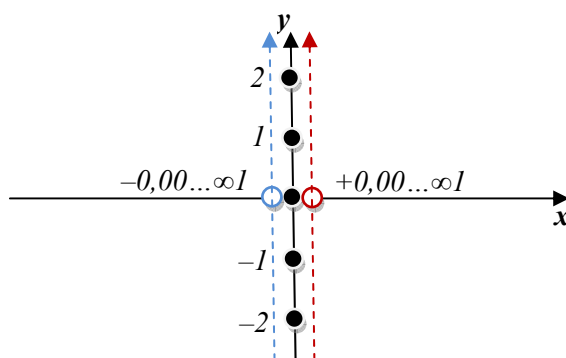
Если бы не существовало пространства сознания, в котором не всегда выполняются привычные для нас операции со знаками, то в информационном поле не существовало бы самой возможности изображать одни и те же события диаметрально противоположным образом. Признание свободного волеизъявления (+), помноженное на борьбу с фашизмом (+), нельзя было бы представить как проявление «гитлеровского фашизма» (-). Тем не менее, в массовой культуре Запада, находящейся под наблюдением всевидящего ока АНБ США, это достигается простым нажатием клавиши «Enter». Кибернетическое управление ментальным полем позволяет «вводить» в сознание любой группы лиц какие угодно деструктивные идиомы, прививать противоестественные склонности, устанавливать двойные стандарты в международном праве, в общественных нормах, в научных и религиозных воззрениях.

Некоммутативность знаков возникает не только в информационном поле, нечто подобное мы можем обнаружить в явлениях квантовой физики: масса, обладающая положительной энергией и отрицательным зарядом (-), определяет частицу электрон, в то же время существует другая частица позитрон с такой же точно массой, обладающая положительной энергией и положительным зарядом (+). И подобных примеров великое множество! Так как физический вакуум есть заполнение положительной энергией уровней с отрицательной энергией, то физики говорят о возможном существовании целых «антимиров», где роль электронов выполняется позитронами.

Как известно, в квантовой механике используется некоммутативная алгебра гейзенберговских матриц, когда перемножение матрицы a на b в общем случае не обязательно равно перемножению матрицы b на a (закон $a \cdot b = b \cdot a$ выполняется только тогда, когда матрица $a = b$). Аналогичным образом произведение одинаковых знаков в общем случае не обязательно равно знаку «+», а произведение знаков «+» на «-» в общем случае не обязательно равно знаку «-». Чтобы понять, почему возможно осуществление столь странной на первый взгляд некоммутативности, нужно вспомнить арифметическую аксиому эквивалентности дроби и целого числа.

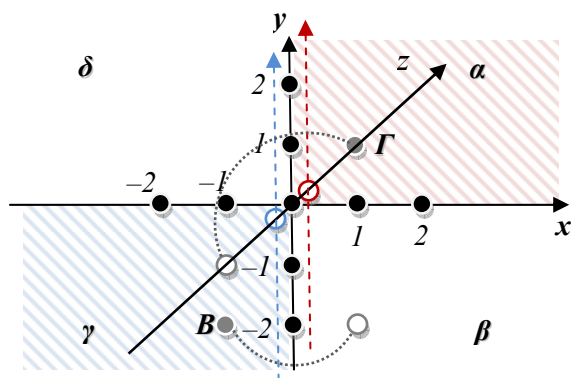
Согласно этой аксиоме десятичная дробь с периодом (9) может быть приравнена соответствующему ей целому числу, например, $0,(9)=1$. Но что мы получим, если попробуем применить данное правило к целому числу 0? Окажется, что вместо дроби с периодом (9) целому числу 0 будет эквивалентна бесконечная десятичная дробь с недостатком $-0,00\dots\infty 1$. Симметрично ей на положительной части числовой прямой будет находиться значение, соответствующее бесконечной десятичной дроби с избытком $+0,00\dots\infty 1$. Причем обе эти бесконечные десятичные дроби эквивалентны нулю: $-0,00\dots\infty 1=0=+0,00\dots\infty 1$.

Пусть на оси координат y расположены положительные и отрицательные числа, для которых действуют обычные операции со знаками, а на оси x расположены оба эквивалентных значения нулевой точки отсчета.



Тогда окажется, что относительно точки отсчета на оси координат x одни и те же числовые значения на оси y могут быть просто «положительными и отрицательными числами», а могут быть только положительными, если рассматривать их относительно точки отсчета с избытком $+0,00\dots\infty 1$, или только отрицательными, если они будут лежать на оси, заданной точкой отсчета с недостатком $-0,00\dots\infty 1$. Существуют и другие способы показать некоммутативность операций со знаками, но все они, так или иначе, зависят от принципа относительности точки отсчета и эквивалентности положительных и отрицательных знаков для этой точки.

Пусть дана декартова система координат, на которую накладывается таблица умножения так, что внутри этой системы действуют обычные операции со знаками. Тогда положительная часть координатной плоскости $\alpha \in (x, y)$ будет представлять собой классическую таблицу умножения, а три остальные $\beta \in (x, -y)$; $\gamma \in (-x, -y)$; $\delta \in (-x, y)$ подчиняться правилу, по которому точки пересечения строк и столбцов в частях β и δ проецируются в отрицательную часть координатной плоскости γ , а точки пересечения «чисто отрицательных» строк и столбцов из γ проецируются в положительную часть α . Так мы построим поле, где фактически будут заполняться только положительная часть α и отрицательная часть γ координатной плоскости. Перемножению чисел $+1$ на -2 в этом поле будет соответствовать точка В $(1, -2)$, которая проецируется в γ , а перемножению чисел -1 на -1 будет соответствовать точка Г $(-1, -1)$, которая проецируется в α .



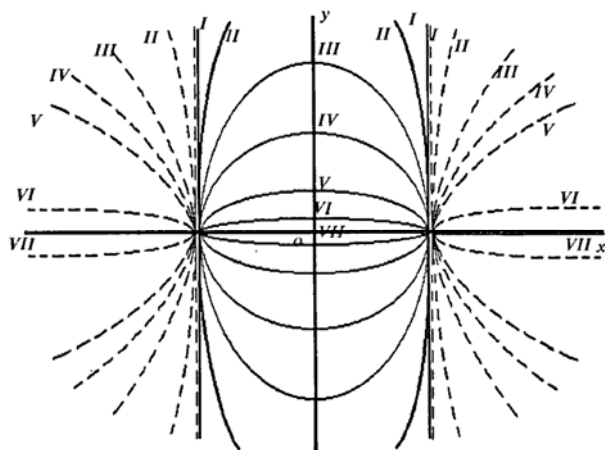
Несмотря на то, что все получаемые значения либо отрицательные и находятся в части координатной плоскости γ , либо положительные и находятся в части α , ничто не мешает ввести в эту систему ось z , нулевая точка которой эквивалентна бесконечным приближениям с избытком и недостатком $-0,00\dots\infty 1 = 0 = +0,00\dots\infty 1$. Тогда мы тоже заметим, что положительные значения α могут быть приняты за отрицательные относительно значений для точки отсчета с недостатком $-0,00\dots\infty 1$, а все отрицательные значения из γ могут быть приняты за положительные относительно точки отсчета с избытком $+0,00\dots\infty 1$.

Мы можем взять четырехмерное пространство-время и обнаружить в нем ровно такое же свойство некоммутативности операций со знаками, если к точке отсчета в пространственно-временном континууме будет применима аксиома эквивалентности, другими словами, если данная точка может ассоциироваться через наше сознание с бесконечностью. То же самое относится к пространствам любой размерности, включая многомерное информационное поле, в котором мы существуем и с которым постоянно взаимодействуем. Более того, чем большей размерностью обладает пространство, тем большей способностью к некоммутативным операциям со знаками оно будет обладать. В одномерном пространстве (на числовой прямой) у нулевой точки отсчета два симметрично эквивалентных значения, в двухмерном пространстве (две перпендикулярно размещенные прямые) у точки отсчета будет уже четыре эквивалентных значения, в трехмерном — шесть и так дальше. При этом даже в линейном пространстве числовой прямой знаки «+» и «-» перестают быть «классическими» коммутативными знаками, не говоря уже о знаках «+» и «-» в многомерных или сферических пространствах, где тривиальная данность положительного и отрицательного значений становится все менее и менее определенной.

Так что имеет место математическая лемма: для всякого n -мерного пространства можно задать точку отсчета с дополнительным измерением, относительно которой в данном пространстве будут выполняться некоммутативные операции со знаками. И обратная лемма: для всякого n -мерного пространства, в котором выполняются некоммутативные операции со знаками, можно задать точку отсчета с дополнительным измерением, позволяющую переводить данные операции в коммутативные операции со знаками.

О возможностях перехода в мнимые плоскости говорил в своем трактате «Мнимости геометрии» Павел Флоренский: «Всякий вырезок плоскости с одной стороны положителен, а с другой — отрицателен, и потому вся плоскость с одной стороны положительна, а с другой отрицательна».¹ Флоренский указал на физический смысл некоммутативных операций со знаками, в самом деле, если рассматривать электромагнитное поле как некоторую плоскость, одна сторона которой положительна, а другая отрицательна, то собственные длины (или моменты вращений) элементов в этом поле будут вторичными величинами: «Ради сохранения однородности измерения величин, необходимо и площадь на положительной стороне плоскости считать величиною первого измерения, а всякий отрезок на ней — величиною измерения $1/2$, потому что он получается через извлечение квадратного корня из 1 ».² По достоинству оценить это наблюдение можно только в наши дни, когда мы знаем, что спин электрона имеет значение 2 (то есть, чтобы сделать полный оборот вокруг своей оси, ему требуется повернуться не на 360, а на 720 градусов). А значит, действительно, собственная «длина» элемента оказалась ровно в $1/2$ раза меньше относительно «длины», которую следовало ожидать вне поверхности этого поля ($360 \div 1/2 = 720$).

Далее Флоренский описал мыслительный эксперимент по уменьшению толщины магнитного листа до бесконечности, так, чтобы толщина оказалась равна нулю. Однако вместо рассмотрения конкретных бесконечно малых величин $-0,00... \infty 1$ и $+0,00... \infty 1$, эквивалентных нулю, философ предложил искать связь мнимых чисел с понятием «актуально бесконечно малых величин». Неконструктивность данного подхода вынудила Флоренского ограничиться понятием напряженности, хотя он видел «логическую недостаточность» и «недоразрешенность» затронутой проблемы.³



Изменение вида коники в зависимости от значений параметра p от $-\infty$ до 0 и от $+\infty$ до 0 с действительными и полумнимыми ветвями. Из трактата Павла Флоренского «Мнимости геометрии».

Проблема операций со знаками, в самом деле, до сих пор «недоразрешена». Причина в том, что скрывать проблему от любопытствующих профанов гораздо проще, чем предпринимать шаги к решению. Каждый такой шаг грозит математику жесткими «санкциями», вроде той, которой подвергли Лейтзена Брауэра (исключение из редакции влиятельного математического журнала «Mathematische Annalen») за критику теории множеств Георга Кантора. Такое ощущение, что в современной математике вообще не осталось почти никого, кто занимается фундаментальными проблемами. Как будто все договорились не замечать очевидные нестыковки в стандартных математических мантрах, и всех все устраивает! На вопрос: всегда ли «минус» на «минус» равно «плюс»? — следует стандартный ответ: это очень просто доказывается в теории колец. Но одно дело, когда нужно что-то доказать ради галочки в зачетной книжке, и совсем другое, когда стремишься понять суть проблемы. Так вот, когда стремишься что-то понять, о галочке в зачетной книжке можно забыть.

Коммутативность (с лат. «соизменяемость») знаков означает, что если в том же уравнении $-1 \cdot -1 = +1$ переместить $+1$ из правой части в левую, то знак ее изменится, и мы получим уравнение $-1 \cdot -1 - 1 = 0$. Часто это используется как аргумент против употребления некоммутативности, якобы она разрушает само арифметическое понятие «равенство». Но мы уже сказали, что потребность в обосновании мнимых чисел существует. Мы все

¹ Флоренский П.А. Мнимости в геометрии: расширение двухмерных образов геометрии (опыт нового истолкования мнимостей). М., 1991. С.20

² Там же. С.25

³ Там же. С.33

равно сталкиваемся с этим явлением и хотели бы знать о нем больше. Раз так, при всем уважении к стандартным операциям, следует заметить, что некоммутативные операции со знаками не нарушают понятие равенства. Ведь если мы запишем, что $-1 \cdot -1 = -1$, то при перемещении -1 из правой части уравнения в левую получим выражение $(-1 \cdot -1) + 1 = -1 + 1 = 0$, так как $(-1 \cdot -1)$ по условию в данном конкретном случае равно -1 .

Другое возражение против применения некоммутативных знаков вытекает якобы из теории колец, где можно встретить такое доказательство коммутативности знаков: «Докажем, что для любых элементов A и B произвольного кольца верно, во-первых, $(-A) \cdot B = -(A \cdot B)$, а во-вторых $(-(-A)) = A$. Из этого легко следуют утверждения про единицы: $(-1) \cdot 1 = -(1 \cdot 1) = -1$ и $(-1) \cdot (-1) = -((-1) \cdot 1) = -(-1) = 1$.

Для этого нам потребуется установить некоторые факты. Сперва докажем, что у каждого элемента может быть только один противоположный. В самом деле, пусть у элемента A есть два противоположных: B и C . То есть $A + B = 0 = A + C$. Рассмотрим сумму $A + B + C$. Пользуясь сочетательным и переместительным законами и свойством нуля, получим, что, с одной стороны, сумма равна B : $B = B + 0 = B + (A + C) = A + B + C$, а с другой стороны, она равна C : $A + B + C = (A + B) + C = 0 + C = C$. Значит, $B = C$.

Заметим теперь, что и A , и $(-(-A))$ являются противоположными к одному и тому же элементу $(-A)$, поэтому они должны быть равны.

Первый факт получается так: $0 = 0 \cdot B = (A + (-A)) \cdot B = A \cdot B + (-A) \cdot B$, то есть $(-A) \cdot B$ противоположно $A \cdot B$, значит, оно равно $-(A \cdot B)$. Чтобы быть математически строгими, объясним еще, почему $0 \cdot B = 0$ для любого элемента B . В самом деле, $0 \cdot B = (0 + 0) \cdot B = 0 \cdot B + 0 \cdot B$. То есть прибавление $0 \cdot B$ не меняет сумму. Значит, это произведение равно нулю.⁴

Нетривиальные вопросы возникают уже на первом этапе, когда ставится задача о доказательстве того, что «у каждого элемента может быть только один противоположный». Целое число 0 является элементом кольца, но сколько у него противоположных элементов? Если принять, что 0 — некое пустое множество, то тогда противоположным ему будет любое непустое множество, то есть бесконечное множество действительных чисел. Или, например, сколько противоположных элементов у числа 1 ? Если в нашем кольце разрешена арифметическая операция деления, и мы пользуемся дробями, то единице будет соответствовать не один противоположный элемент, а как минимум два противоположных элемента -1 и эквивалентное ему значение $-0,999... \infty$. А если к этому добавить бесконечное приближение с избытком $-1,000... \infty 1$, то их будет уже три. Как вообще задаются противоположные элементы, через какие точки они находятся?

Подставим конкретные числа $-0,999... \infty$ и $-1,000... \infty 1$ в равенство $A + B = 0 = A + C$, тогда получим:

$$1 + (-0,999... \infty) = 0 = 1 + (-1,000... \infty 1).$$

Преобразование десятичных дробей в обыкновенные позволяет выполнить это двойное равенство:

$$1 + (-9/9) = 0 = 1 + (-((10+1-2)/9))$$

В этом смысле мы можем сказать, что $B = -0,999... \infty$ эквивалентно $C = -1,000... \infty 1$, но можем ли мы сказать, что бесконечная десятичная дробь с недостатком — одно и то же, что бесконечная десятичная дробь с избытком? Несмотря на то, что эти две бесконечные десятичные дроби эквивалентны третьему числу -1 , все три числа являются элементами, принадлежащими различным подмножествам кольца действительных чисел. Так, -1 есть целое отрицательное число, а $-0,999... \infty$ — отрицательная бесконечная десятичная дробь, не являющаяся рациональным числом, согласно действующему в стандартной арифметике исключению.⁵ Но если они являются настолько различными элементами, нельзя заявлять о том, что « A и $(-(-A))$ являются противоположными к одному и тому же элементу $(-A)$, поэтому они должны быть равны». Из того, что они, действительно, равны, еще не следует, что они всегда противоположны «к одному и тому же элементу». Вот, в чем вся загвоздка. Это доказательство пригодно только для натуральных целых чисел (где число 0 — ненатуральное).

По той же причине нельзя категорически заявлять, что произведение элементов $(-A) \cdot B$ всегда будет противоположно элементам $A \cdot B$. Например, когда $-A = -0,999... \infty$; $B = 2$; $A = 1$, нельзя сказать, что $(-A) \cdot B = -1,999... \infty$ полностью противоположно $A \cdot B = 2$. Сколь далеко мы бы ни приближались из десятичной дроби $-1,999... \infty$ к целому числу -2 , всегда будет оставаться бесконечно малый интервал $-0,000... \infty 1$, мешающий нам

⁴ Епифанов Е. Почему минус на минус дает плюс? / Электронный журнал www.elementy.ru

⁵ «Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, период которой отличен от 9. Верно и обратное утверждение: любая бесконечная периодическая дробь с периодом, отличным от 9, является рациональным числом» (Кочетков Е.С. Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Ч.1. М., 1966. С.85)

со всей строгостью говорить о противоположности дроби $-1,999\dots\infty$ и целого числа 2. Однако написаны горы книг, где повторяется *мантра взаимнооднозначности* и другие лукавые мантры, превращающие математику в некое «*кольцо всевластия*», убивающее всякую живую душу, исключаящее из сознания человека интуицию.

Быть может, такие тонкости кажутся несущественными для нужд повседневности, но они важны для понимания взаимодействий на уровне квантовых объектов, на уровне биотоков, нейросигналов, важны для понимания психических эффектов взаимодействия сознания с информацией, с формулами внушения, с виртуальными образами, архетипами, поведенческими стереотипами. Всегда ли враг (-) моего врага (-) = мой друг (+)? Разве не может быть такого, что враг (-) моего врага (-) = тоже враг (-) или даже еще больший враг? Всегда ли кто не с нами (-), тот против нас (-(-))? Разве откровенно враждебная по отношению к русскому народу политика Запада в неонацистской Украине не сыграла положительную роль в решении вопроса по Крыму, аннексированного Украиной еще при Хрущеве без учета мнения самих крымчан?

Та реальность, в которой мы живем, намного шире, намного динамичнее тривиальных операций со знаками, которые мы привыкли считать единственно правильными. Манипуляции с массовым сознанием, создание панических настроений, крупные биржевые игры, — все это опирается на ограниченное мышление, привитое большинству. Доказав однажды «*всем образованным людям*», что «-» на «+» всегда = «-», можно рассчитывать на соответствующий психологический эффект в информационной войне с этими же людьми: введение санкций (-) против России (+) = катастрофа вселенского масштаба (-).

Само по себе придумывание доказательств — это, конечно же, неплохая тренировка сообразительности, но этого недостаточно для появления мыслителя. Чтобы мыслить самостоятельно, нужно еще уметь отличать тренировку от дрессировки. В любых социальных системах, особенно в науке, очень много внимания уделяется дисциплинированию ума. Прежде всего, любой человек или ученый впитывает и усваивает уже существующие теории и взгляды, привыкая их доказывать, защищать, распространять на других людей. Но в сущности это еще только дрессировка, выработка условных рефлексов ремесленника. Она нужна не для того, чтобы воспитать мыслителя, а для того, чтобы воспитать мастера узкой специализации, покорного работника (в лучшем случае) или трусливого интеллигента (в худшем), находящегося под контролем своего ментального хозяина, даже если этот интеллектуал считает себя «*свободомыслящим*» борцом за прогрессивные взгляды.

Присвоение знака зависит не столько от места-времени наблюдателя и его положения, сколько от его потенциальных возможностей, внутренних свойств, уровня мышления. Как магнитная стрелка не всегда верно показывает направление полюса, а в местах магнитных аномалий начинает крутиться то в одну, то в другую сторону, так же и операции со знаками при изменении масштабов и размерностей пространства не всегда верно интерпретируют действительность. Если человек вор и обманщик, он будет напропалую врать и обвинять в воровстве того, кто не крал. США могут быть самым тоталитарным государством, главным агрессором на нашей планете, организатором всех кровавых войн и революций, но они будут обвинять в тоталитаризме всех тех, кто пытается защитить жизни простых людей от людоедской политики Штатов, кто уважает суверенитет других стран и соблюдает нормы международного права.

Некоммутативность знаков позволяет обманывать, создавать иллюзорную действительность, в то же время, с ее помощью более достоверно описывается многомерная реальность (таттва). Законы причинности при этом не исчезают, а переходят из статического состояния в динамическое. Яблоко, отсутствующее в пустой комнате (-), становится присутствующим (+) при расширении области пространства до ближайшего супермаркета, и наоборот, присутствующее яблоко, которое мы держим в своей руке (+), становится отсутствующим (-) при сокращении пространства до радиуса атома. Причинно-следственные связи преобразуются, но не для того, чтобы отменить действие высших принципов дхармы, а как раз для того, чтобы они продолжали соблюдаться — для того, чтобы ложь и обман в информационном поле никогда не оставались безнаказанными.

QUOD TIBI FIERI NON VIS, ALTERI NE FECERIS

(с лат. «Что тебе не нужно, и другому не причиняй»)

