С.Л. Василенко

Обобщенные последовательности 2–3 порядка

Гляди в оба, зри в три.

Линейные аддитивно-рекуррентные последовательности, обобщающие широко известные числа Фибоначчи, базируются на добротной теории возвратных (разностных) уравнений [1].

Решение таких уравнений для линейного однородного случая обычно находится в виде взвешенной суммы степеней корней характеристических полиномов.

Числовые константы или коэффициенты пропорциональности определяются с помощью априори задаваемых начальных условий.

Особых затруднений здесь не возникает.

Новые наработки в математических журналах основном связаны с усложнением постановочных задач в рамках уже готового решения. Как правило, они совершенно не связаны с потребностями практики и главным образом сопряжены с синтетической игрой мыслительных способностей и аналитического воображения. Во всяком случае, всё лучше, чем занимать пытливые умы мотивировкой негативного толка.

Как говорится, ладно с ней ... с прикладной полезностью. Лишь бы не во вред...

Исторические параллели. Идею поделиться некоторыми соображениями-наработками в области числовых моделей Фибоначчи подсказала недавняя работа [2].

Автор представил на обозрение комбинаторные формулы для суммы и разности целых степеней n корней $\alpha^n \pm \beta^n$ обычного квадратного уравнения.

Приведенные соотношения правильные. Но, увы, давно и хорошо известные.

При этом выполненные преобразования выглядят неотчётливо. Без анализа работ предшественников. Описание материала в основном построено на частных примерах без строгих математических обоснований. Равно как и последующие попытки его уточнения [3]. Когда, наоборот, на очевидных положениях выстраивается цепочка теорем, напоминающих незамысловатые схемы [4].

Хотя де-факто речь идёт о простых и хорошо изученных на сегодня обобщённых моделях Фибоначчи второго порядка, история которых восходит, как минимум, к 60-м годам прошлого века [5–7]. Задолго до публикаций В. Шпинадель (1998), В. Шенягина (1997), Г. Аракеляна (1989) и ряда других авторов, известных по материалам виртуального Института золотого сечения[1].

Оценивая общее состояние в развитии событий и проводимых исследований, невольно вырисовывается следующая картина: после провозглашения тезы о развитии задачи золотого сечения /согласно алгебраическим квадратичным решениям общего вида/ данная тема в золотоискательской среде "забуксовала" на полпути.

Что говорить, если даже так называемые гиперболические функции Фибоначчи [8], на которые возлагались определённые надежды, основательно застопорились в своём движении-развитии на уровне неполного квадратного уравнения $x^2 = px + 1$.

Совершенно без каких-либо перспектив дальнейшего совершенствования.

Хотя бы для базовой квадратичной модели $x^2 = px + q$. Как самого простого случая повышения уровня сложности, со снятием ограничения $q = 1$. Однако не выходит...

Разве что следует полностью отказаться от привнесенных искусственных форм и перейти на обычные в математике огибающие линии, которые позволяют свободно расширить уровень обобщения до алгебраического полинома n-го порядка!

---

[1] http://www.trinitas.ru/rus/002/a0232001.htm.

Возможны и другие апробированные подходы.

Так, введенные (1967) на основе корней (α, β) функции Фибоначчи и Люка экспоненциального вида [9]:

$$f_n(x) = \frac{\alpha^n e^{\alpha x} - \beta^n e^{\beta x}}{\sqrt{5}}, \qquad l_n(x) = \alpha^n e^{\alpha x} + \beta^n e^{\beta x},$$

допускают свободное распространение на модель k-боначчи [10] с произвольным числом k аддитивных слагаемых.

Согласно логике знаменитых теорем К. Гёделя любая система не может до конца понять свое собственное устройство, если не поднимется на следующий уровень сложности (обобщения, развития).

Судя по упомянутым работам, такой подъем у "золотоискателей" пока не получается.

Им непросто даётся даже анализ обычных квадратичных решений. Не говоря об их усложнении.

В то же время озвученная проблематика в подавляющей мере уже изучена специалистами Fibonacci Association[2].

Например, в работе [11] исследуется непростая задача по нахождению конечных сумм для s-х степеней $\sum_{k=0}^{n-1} w_k^s$, а также свойства величин w_{mn}, – для последовательностей $w_n = w_n(a, b;\, p, q) = pw_{n-1} + qw_{n-2}$ с парой начальных условий $a = w_0, b = w_1$.

Эйзенштейн предложил [12] и Лорд [13] решил (1985) элегантную проблему эффективного представления n-й степени константы золотого сечения в виде непрерывной цепи, содержащей числа Люка L_n:

$$\Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n -}\ \frac{(-1)^n}{L_n -} \cdots$$

Позже данная форма обобщена [14] для последовательности $w_n(a, b;\, p, q)$, соответствующей квадратному уравнению общего вида.

В работе [15] решается задача аналитического подсчёта ещё более сложных сумм

$$\sum_{a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n} \left(F_{a_1} F_{a_2} \cdots F_{a_k}\right)^m, \; m = 1, 2, 3; \; k = 2, 3 \ldots.$$

Перечень подобных выразительных работ математического склада можно продолжить.

Однако их скрупулезный анализ не входит в наши планы.

Считаем возможным далее осветить лишь некоторые основополагающие положения.

Причём в том виде, как они нам представляются, в том числе с учётом собственных исследований в данной области.

Общие сведения. Математическая форма [1, гл. 5; 2–4]

$$x_{m+t} = a_1 x_{m+t-1} + a_2 x_{m+t-2} + \ldots + a_m x_t = \sum_{j=1}^{m} a_j x_{m+t-j} \tag{1}$$

называется *линейным однородным разностным* (возвратным) *уравнением* m-го порядка с постоянными коэффициентами a_j, $a_m \neq 0$, $m \in \mathrm{N}$ – числа натурального ряда [16].

Нижний индекс t, по сути, адекватен развитию процессов во времени или в данном случае дискретному временно̲му параметру n.

---

[2] http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html.

Линейность обусловлена тем, что вместе с неодинаковыми последовательностями $x_{m+t} \neq y_{m+t}$ уравнению (1) удовлетворяет также их линейная комбинация $k_1 x_{m+t} + k_2 y_{m+t}$, где k_1, k_2 – некоторые константы.

Однородность уравнения (1) отличает его от соотношений типа

$$x_{m+t} = \sum_{j=1}^{m} a_j x_{m+t-j} + u(t),$$

где $u(t)$ – некоторая, в общем случае, произвольная числовая последовательность.

При заданных m начальных условиях ("затравочных числах") $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \dots x_{m-1})$ уравнение (1) определяет *линейную рекуррентную* (*возвратную*) *последовательность*: начиная с исходной точки $t = 0$, каждый ее элемент x_{m+t} вычисляется через m предшествующих.

Выражение [17]

$$P(x) \equiv x^m - a_1 x^{m-1} - a_2 x^{m-2} - \dots - a_m = x^m - \sum_{j=1}^{m} a_j x^{m-j}, \tag{2}$$

с коэффициентами из (1), – есть характеристический полином степени $\deg P(x) = m$ разностного уравнения (1).

Корнями полинома (2) называется решение алгебраического уравнения $P(x) = 0$.

Теорема Бернулли[3]. Если λ_1 – единственный наибольший по модулю корень уравнения $P(x) = 0$, а остальные его корни $|\lambda_j| < |\lambda_1|$, $j = \overline{2, m}$, то для практически любого набора начальных данных $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \dots x_{m-1})$ линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (1) обладает свойством $\lim\limits_{t \to \infty} x_{t+1}/x_t = \lambda_1$.

Приведем некоторые элементы доказательства [18], которые помогают прояснить возникновение предельных свойств.

Поскольку по условию $|\lambda_j| < |\lambda_1|$, то $|\lambda_j / \lambda_1| < 1$ и $(\lambda_j / \lambda_1)^t \underset{t \to \infty}{\to} 0$.

Ограничимся случаем, когда все корни λ_j различны, тогда согласно теории разностных уравнений общий член последовательности (1) можно представить в виде [1, с. 347]

$$x_t = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + \dots + c_m \lambda_m^t = \sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^t,$$

где числа-константы $(c_1, \dots, c_m)$ определяются с помощью начальных условий $X_{\text{o}} = (x_0, x_1, \dots x_{m-1})$ из системы m линейных уравнений $\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^s = x_s$, $s = \overline{0, m-1}$.

Отсюда следует

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^{t+1}}{\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j^t} = \frac{\lambda_1^{t+1}}{\lambda_1^t} \cdot \frac{c_1 + \sum_{j=2}^{m} c_j (\lambda_j / \lambda_1)^{t+1}}{c_1 + \sum_{j=2}^{m} c_j (\lambda_j / \lambda_1)^t} \underset{t \to \infty,\, c_1 \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_1.$$

[3] Даниил Бернулли (1700–1782) выдающийся швейцарский физик и математик, сын Иоганна Бернулли. В его работе «Замечания о рекуррентных последовательностях» (1732) изложен рекуррентный метод решения алгебраических уравнений.

Таким образом, согласно теореме Бернулли отношение двух соседних членов возвратной последовательности стремится к максимальному по модулю корню характеристического алгебраического уравнения, – практически для любого набора начальных условий X_0, за исключением такого, который может привести к нулевой константе $c_1 = 0$, когда предельный переход не гарантируется.

Следует сказать, что Бернулли формулировал своё утверждение, преследуя цель построения формализованных процедур для рекуррентно-приближенного вычислении корней алгебраических уравнений произвольного порядка. Позже эта задача была обобщена французским математиком А. Пуанкаре для полиномов с переменными коэффициентов, – доказательство его теоремы приведено в работе [1, с. 347–359].

Обобщённые квадратичные последовательности Фибоначчи.

Рассмотрим линейную модель второго порядка.

Квадратичную рекуррентную последовательность с парой начальных условий $(w_0 = a,\ w_1 = b)$ удобно представить в привычных обозначениях Хорадама [5]:

$$w_n = w_n(a, b;\ p, q) = pw_{n-1} + qw_{n-2}.$$

Если корни $(\alpha, \beta) = \frac{p \pm d}{2}$ характеристического уравнения $x^2 = px + q$ различны, то для элементов числового ряда имеем явную (не рекуррентную) формулу Муавра-Бине

$$w_n = \frac{c_1\alpha^n - c_2\beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad (3)$$

где $d = \sqrt{p^2 + 4q}$ – дискриминант; коэффициенты $c_{1,\,2}$ находятся, исходя из начальных условий: $c_1 = b - a\beta,\ c_2 = b - a\alpha$.

Хорошо известные числа Фибоначчи и Люка определятся как $F_n = w_n(0, 1;\ 1, 1)$, $L_n = w_n(2, 1;\ 1, 1)$. Можно также выделить частные последовательности Люка[4]:

$$u_n = w_n(0, 1;\ p, q) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad v_n = w_n(2, p;\ p, q) = \alpha^n + \beta^n.$$

Собственно это и есть разновидности обобщённых последовательностей Фибоначчи с традиционными начальными условиями (0, 1) и (2, p). Только теперь для квадратного характеристического уравнения общего вида $x^2 = px + q$.

Их аналитические представления содержат разность и сумму степеней корней.

Именно эти величины и вычисляются в работе [2].

А частные случаи, которые сформулированы в виде малосодержательных теорем [3], элементарно следуют из общего решения (3):

$$w_n(1, \alpha;\ p, q) = \frac{(\alpha - \beta)\alpha^n - (\alpha - \alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^n;$$

$$w_n(2, \alpha + \beta;\ p, q) = \frac{(\alpha + \beta - 2\beta)\alpha^n - (\alpha + \beta - 2\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n;$$

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_sequence; http://mathworld.wolfram.com/LucasSequence.html.

$$w_n(0, \alpha-\beta;\ \ p, q) = \frac{(\alpha-\beta)\alpha^n - (\alpha-\beta)\beta^n}{\alpha-\beta} = \alpha^n - \beta^n .$$

Здесь не требуются никакие доказательства утверждений методом индукции [3].

Выкладки очевидным образом вытекают из формулы (3) и справедливы для квадратного уравнения общего вида.

Как и «приведенный ряд разностей n-х степеней корней» [3] на поверку является известной около полувека обобщённой последовательностью Фибоначчи.

Выполнив несложные преобразования, можно записать обобщение формулы Муавра–Бине для непрерывного отображения с использованием только одного корня $\lambda = \alpha > 0$ [19]:

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-1} = \frac{\lambda^n - (-q)^n \lambda^{-n}}{d} = \frac{\lambda^n - \widehat{\lambda}^{-n}}{d}, \text{ где } \widehat{\lambda} = -\lambda/q .$$

При этом непрерывные огибающие линии-функции воссоздаются по универсальной паре формул [20, 21]:

$$\left.\begin{matrix}\widehat{A}(t)\\ \widehat{B}(t)\end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^t \pm q^t \lambda^{-t}}{d} .$$

С учетом двух начальных условий (w_0, w_1) непрерывная обобщенная функция Фибоначчи $w(t)$ и её две огибающие $\widehat{a}(t), \widehat{b}(t)$ принимают вид:

$$w(t) = w_1 u(t) + w_0 q u(t-1);$$

$$\begin{cases}\widehat{a}(t) = w_1 \widehat{A}(t) + w_0 q \widehat{B}(t-1);\\ \widehat{b}(t) = w_1 \widehat{B}(t) + w_0 q \widehat{A}(t-1).\end{cases}$$

Для традиционных начальных условий $(f_0, f_1) = (0,\ 1)$ и $(l_0, l_1) = (2,\ p)$ квадратично-обобщённые последовательности Фибоначчи и Люка наглядно представляются в комбинаторной форме [19]:

$$\begin{cases} f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{d} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_{n-k}^{\,k}\ p^{n-2k}\ q^k, \\ l_n = \alpha^n + \beta^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \dfrac{n}{n-k} C_{n-k}^{\,k}\ p^{n-2k}\ q^k, \end{cases} \tag{4}$$

где $C_m^{\,i} = \binom{m}{i} = \dfrac{m!}{i!\,(m-i)!}$ – биномиальные коэффициенты;

$m! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}m$ – факториал от m с условным принятием $0! = 1$;

$\lceil \xi \rceil$ = trunc(ξ) – целая часть ξ (наибольшее целое число, не превосходящее ξ).

Заметим, что приведенные формулы (4) универсальны. Без каких-либо уточнений они справедливы и для комплексных корней $\alpha \neq \beta$ квадратного уравнения. То есть, в отличие от [2], в этом случае отсутствует надобность в нахождении отдельных решений.

Для трёх обобщённых последовательностей Фибоначчи с разными начальными условиями

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}, \quad (u_0, u_1) = (0,\ 1);$$

$$w_n = pw_{n-1} + qw_{n-2}, \quad (w_0, w_1);$$

$$v_n = pv_{n-1} + qv_{n-2}, \quad (v_0, v_1)$$

в работе [22] получены полезные уравнения взаимосвязи:

$$w_{n+k+1} = w_{n+1}u_{k+1} + qw_n u_k;$$

$$w_n^2 - (-q)^{n-k} w_k^2 = u_{n-k}(w_1 w_{n+k} + qw_0 w_{n+k-1});$$

$$v_{m+k} w_{n+k} - (-q)^k v_m w_n = u_k (w_1 v_{m+n+k} + qw_0 v_{m+n+k-1}).$$

В частности, вторая формула обобщает сумму (разность) квадратов чисел Фибоначчи

$$F_n^2 + (-1)^{n+k-1} F_k^2 = F_{n-k} F_{n+k},$$

третья – сумму (разность) произведений чисел Люка и Фибоначчи

$$L_n F_n + (-1)^{n+k} L_k F_k = L_{n-k} F_{n+k}.$$

Сопоставимость результатов. Приведенное изложение и материалы других публикаций позволяют высказать некоторые частные соображения по работе [3].

- Оценка значимости статьи [2], на наш взгляд, явно преувеличена.

В ней нет новых обобщений. Отсутствуют и строгие выводы. Изложение ограничено несколькими демонстрационными частными случаями.

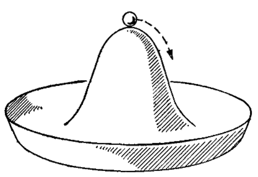
В целом она отражает неполное повторение результатов полувековой давности в части решения квадратичной модели Фибоначчи в явном виде, а также последующие известные интерпретации (4) обобщённых последовательностей Фибоначчи и Люка в комбинаторной форме. Причём, в отличие от [2], существующие формулы (4) одинаково верны как для вещественных, так и для мнимых корней квадратного уравнения.

- Как-то по-новому взглянуть на причины возникающих соотношений и тем более их унификации также не приходится. Все отображения [3] соотносятся с обычным использованием аналитического решения разностного уравнения (квадратичной рекурсии):

$$w_n = pw_{n-1} + qw_{n-2} = \frac{(w_1 - w_0\beta)\alpha^n - (w_1 - w_0\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{w_1\left(\alpha^t - \widehat{\alpha}^{-t}\right) - w_0\left(\alpha^{t-1} - \widehat{\alpha}^{-t+1}\right)}{d}.$$

Формулируемые частные утверждения просто следуют из этого выражения.

- Меньший по модулю корень – это не аттрактор, а некий образ «шарика на сомбреро» [23, с. 67]. Когда имеет место спонтанное нарушение устойчивости и симметрии: шарик, помещённый на вершину поверхности в форме мексиканского сомбреро, самопроизвольно скатывается вниз.



Применительно к квадратичной модели малейшее отклонение начальных условий или точности промежуточных вычислений, как крайне неустойчивое равновесие (около меньшего корня) смещается на действительно устойчивый аттрактор – наибольший по модулю корень полинома.

Стоит ли говорить о корне β как об аттракторе, если сходимость к нему осуществляется только в одном единственном тривиальном случае $w_1 = \beta w_0$ – среди необозримого поля начальных условий (w_0, w_1).

В случае n-мерной модели точное значение корней, как правило, не известно.

Они определяются численными методами.

Задать их "истинные" значения априори не представляется возможным.

Поэтому разностная модель в своем предельном отношении w_{n+1}/w_n будет сходиться к своему единственному настоящему аттрактору (по Бернулли) – максимальному по модулю корню характеристического полинома второго порядка.

• Промежуточное выражение w_{n+1}/w_n в виде конечной цепной дроби для фиксированного значения n элементарно вытекает из конечного числа шагов или "этажей дроби" рекурсивного преобразования квадратного уравнения:

$$w_{n+1}/w_n \;\Rightarrow\; x = p+\frac{q}{x} = p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{x}} = p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p+\cfrac{q}{p+\ldots\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{w_0}{w_1}}}}.$$

Примечательно, что такую форму мы находим 135 лет назад ещё у Люка [24, с. 13].

При увеличении количества шагов n значимость конкретных значений начальных условий (w_0, w_1) довольно быстро нивелируется, и отношение соседних элементов ряда асимптотически приближается к значению максимального по модулю корня.

Обобщённые кубические последовательности Фибоначчи.

Чем хороши различные обобщенные последовательности Фибоначчи, так это общей идеологией образования числовых рядов по универсальной аддитивно-рекуррентной схеме.

Начиная с простого суммирования двух предшествующих элементов, эта теория давно перешагнула рубеж квадратного уравнения с единичными коэффициентами.

Так, числа трибоначчи, алгоритмически придуманные математиком Марком Фейнбергом, расширяют последовательности Фибоначчи в сторону 3-членной аддитивно-линейной рекурсии [25]

$$Z_n = Z_{n-1}+Z_{n-2}+Z_{n-3}, \qquad (Z_0, Z_1, Z_2)=(0, 0, 1).$$

Она имеет свою, только ей присущую асимптотику

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_{n+2}}{Z_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Z_{n-1}+Z_n+Z_{n+1}}{Z_{n+1}} = \frac{1}{3}(a_+ + a_- + 1)\approx 1{,}839,$$

которая связана с действительным корнем характеристического уравнения $x^3 = x^2 + x + 1$ или уравнением m-боначчи $x + x^{-m} = 2$ при $m = 3$.

Любой член ряда трибоначчи можно определить путем округления (до ближайшего целого) числа, определяемого аналитическим выражением [26]

$$Z_n \approx \frac{3b}{b^2-2b+4}\left(\frac{a_+ + a_- + 1}{3}\right)^{n-1},$$

где $a_\pm = \sqrt[3]{19\pm 3\sqrt{33}}$, $b = \sqrt[3]{586+102\sqrt{33}}$.

Строгое аналитическое соотношение, аналогичное формуле Муавра–Бине для чисел Фибоначчи, продемонстрировано в работе [27] и приводит к следующему результату, $m = 3$:

$$Z(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^t}{\prod_{i=1,\, i\neq j}^{m}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)}=\frac{\lambda_1^t}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{\lambda_2^t}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}+\frac{\lambda_3^t}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)},\quad (5)$$

где $Z(t)$ – значения числового ряда;

$\lambda_i,\ i=\overline{1,\, m}$ – в общем случае комплексные корни исходного алгебраического уравнения m-го порядка, эквивалентного разностно-рекуррентной модели.

Этим самым устраняется парадокс, когда гиперболические признаки (через свойства геометрической прогрессии) де-факто налицо, но описать их с помощью гиперболических функций Фибоначчи [8] мы не можем.

Само по себе аналитическое (явное) представление (5) для $m>4$ имеет вспомогательное значение.

Его особенность состоит в необходимости знания всех корней.

Современные ЭВМ вычисляют корни быстро и с большой точностью.

И всё же явный вид, так или иначе, является приближенным вследствие численного определения корней.

Вместе с тем эта форма имеет одно несомненное преимущество: можно говорить о непрерывном описании функции Фибоначчи при замене дискретного аргумента (в числовых последовательностях) – на непрерывный аналог.

Иначе говоря, в этом ракурсе нас больше интересует не столько внешний вид или удобоваримость этой формулы, сколько возможность с помощью неё построить непрерывную функцию от непрерывного аргумента t.

Разностный аналог не позволяет выполнить такую операцию.

Формула (5) соответствует начальным условиям $(Z_0, Z_1, ..., Z_{m-1})=(0, 0, ..., 1)$.

При соответствующем дополнении она расширяется и на любой набор таких "затравочных чисел".

Пусть $Z_n=Z_{n-1}+Z_{n-2}+Z_{n-3}$ – числа трибоначчи со стандартными начальными условиями $(Z_0, Z_1, Z_2)=(0, 0, 1)$.

Тогда произвольная аддитивно-рекуррентная последовательность 3-го порядка $z_n=a_2z_{n-1}+a_1z_{n-2}+a_0z_{n-3}$ с любыми начальными условиями (z_0, z_1, z_2), не равными одновременно нулю, взаимосвязана с величинами Z_n следующей аналитической зависимостью [21]:

$$z_n=z_2Z_n+(z_1a_1+z_0a_0)Z_{n-1}+z_1a_0Z_{n-2}\,.$$

Весьма интересная комбинаторно-суммирующая формула вытекает из работы [28]:

$$z_{n+2}=\sum_{s=0}^{\lceil n/2\rceil}\sum_{r=0}^{\lceil n/3\rceil}C_{n-s-2r}^{s+r}\ C_{s+r}^{r}\ a_0^r\ a_1^s\ a_2^{n-2s-3r}\ ,$$

где $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k, равное биномиальному коэффициенту.

Разностному уравнению $z_{n+3}=a_2z_{n+2}+a_1z_{n+1}+a_0z_n$ соответствует алгебраическое характеристическое уравнение $\lambda^3=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$.

Если все корни λ_i характеристического уравнения различны, то решение разностного уравнения получается в виде суммы [17] $z_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n$.

Константы c_i определяются с помощью начальных условий z_{i-1} из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + \quad c_2 + \ldots + \quad c_m = z_0 \ , \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_m c_m = z_1 \ , \\ \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \ldots + \lambda_m^2 c_m = z_2 \ , \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, так как её определитель (Вандермонда) отличен от нуля.

Для третьего порядка уравнения $m = 3$ константы равны:

$$c_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3 z_0 - (\lambda_2 + \lambda_3) z_1 + z_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3 z_0 - (\lambda_1 + \lambda_3) z_1 + z_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \quad c_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2 z_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) z_1 + z_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Или в общем виде с учётом комбинации трёх различных индексов (k, m, l):

$$c_k = \frac{\lambda_m \lambda_l z_0 - (\lambda_m + \lambda_l) z_1 + z_2}{(\lambda_m - \lambda_k)(\lambda_l - \lambda_k)}.$$

Таким образом, обобщенная функция трибоначчи для непрерывного времени t равна

$$z(t) = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + c_3 \lambda_3^t.$$

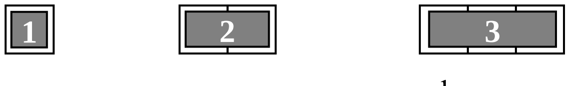
Она зависит от априорного набора трёх исходных коэффициентов a_{i-1}, влияющих на значение корней λ_i, а также трёх начальных условий z_{i-1}, от которых зависят числовые константы c_i.

Итак, сумма степеней корней алгебраического характеристического уравнения, эквивалентного своему разностному (возвратному) аналогу, выражает аналитическое представление обобщённых последовательностей Фибоначчи–Люка посредством явных формул Муавра-Бине. И что примечательно, именно такой классический подход позволяет легко построить огибающие линии к непрерывным функциям Фибоначчи на уровне алгебраического полинома n-го порядка, взамен несовершенных гиперболических форм, справедливых лишь для квадратного уравнения частного вида $x^2 = px + 1$.

От кроликов к "полимино". Известные кролики Фибоначчи интересны как задача, которая позволила построить замечательный ряд.

Но не менее любопытен подход, основанный на интерпретации-представлении через множество "полимино" разной длины [29, 30].

Выбираем базовый набор "полимино" из трёх форм (1, 2, 3):



Пусть v_n – число вариантов расстановки данных форм в виде ленты длиной n или (то же самое) количество комбинаций записи натурального числа суммой чисел (1, 2, 3).

Легко видеть, что $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ и $v_3 = 4$. Рассмотрим далее общий случай $n \geq 4$.

Здесь допустимы только три возможных начала заполнения ленты.

Если первой стоит 1 (2 или 3), то остающееся поле длиной $n-1$ ($n-2$ или $n-3$) заполняется v_{n-1} (v_{n-2} или v_{n-3}) способами.

В итоге получаем:

$$v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + v_{n-3}\,.$$

Проводя соответствие на совпадение значений дискретной функции v_n с числами Трибоначчи Z_n, получаем $v_n = Z_{n+2}$, где $(Z_0, Z_1, Z_2) = (0, 0, 1)$.

Итак, множество вариантов заполнения ленты тремя формами "полимино" (1, 2, 3) описывается знаменитой аддитивной рекурсией трибоначчи.

То есть число трибоначчи Z_n – это количество различных вариантов аддитивной "сборки" натурального числа $n-2$ из базового набора $\mathrm{B} = (1, 2, 3)$.

Выполнив эквивалентные преобразования характеристического уравнения трибоначчи с балансировкой размерности, получаем геометрическое уравновешивание частей равенства:

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-1) = x+1 \;\Rightarrow\; (x\times x)\times(x-1) = (1\times 1)\times(x+1);$$

$$b^3 + b^2 + b - 1 = 0 \;\Rightarrow\; b^2(1+b) = 1-b \;\Rightarrow\; (b\times b)\times(1+b) = (1\times 1)\times(1-b);$$

$$x \approx 1{,}839; \quad b = x^{-1}; \quad b \approx 0{,}519.$$

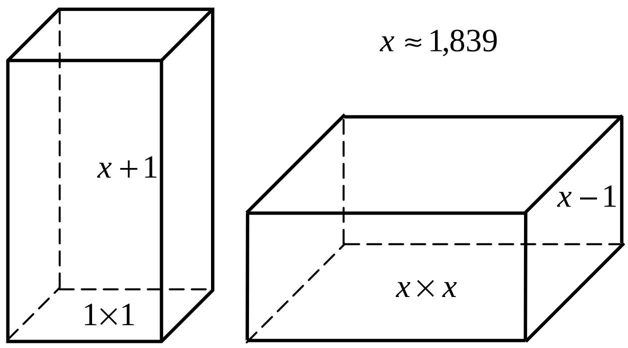


Рис. 1. Геометрическое толкование модели трибоначчи по равновеликости параллелепипедов

Отсюда геометрическое толкование трибоначчи: параллелепипед с квадратом 1×1 в основании и высотой $x+1$ равновелик параллелепипеду с квадратом $x\times x$ в основании и высотой $x-1$ (рис. 1).

Или что равнозначно: параллелепипед с квадратом 1×1 в основании и высотой $1-b$ равновелик параллелепипеду с квадратом $b\times b$ в основании и высотой $1+b$.

Литература:

1. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
2. *Ткаченко И.С.* Теорема о n-х степенях корней приведенного квадратного уравнения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17312, 14.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161931.htm.
3. *Владимиров В.Л.*, *Стахов А.П.* Об унификации числовых рядов рекурсий второго порядка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.17350, 07.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321245.htm.
4. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html.
5. *Horadam A.F.* Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers // The Fibonacci Quarterly, **3.3** (1965), 161–176.
6. *Jarden D.* Recurring sequences. – Riveon Lematematika, Jerusalem, 1958.
7. *Lucas E.* Theorie des nombres. – Paris, 1961, Chapter 18.
8. *Стахов А.П.*, *Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР, 1993. – Т. 208. – № 7. – С. 9–14.
9. *Elmore M.* Fibonacci Functions // The Fibonacci Quarterly, **5.4** (1967), 371–382.
10. *Gwang-Yeon Lee*, *Jin-Soo Kim*, *Tae Ho Cho.* Generalized Fibonacci Functions and Sequences of Generalized Fibonacci Functions // The Fibonacci Quarterly, **41.2** (2003), 108–121.

11. *Jin-Zai Lee*, *Jia-Sheng Lee*. A Note on the Generalized Fibonacci Numbers // The Fibonacci Quarterly, **26.1** (1988), 14–19.

12. *Eisenstein M*. B-530, 531. Problems Proposed // The Fibonacci Quarterly, **22.3** (1984), 274.

13. *Lord G*. B-530, 531. Problems Solved // The Fibonacci Quarterly, **23.3** (1985), 280–281.

14. *Shannon A.G*., *Horadam A.F*. Generalized Fibonacci Continued Fractions // The Fibonacci Quarterly, **26.3** (1988), 219–223.

15. *Feng-Zhen Zhao*, *Tianming Wang*. Some Identities Involving the Powers of the Generalized Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly, **41.1 (**2003), 7–12.

16. *Василенко С.Л*. Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.

17. *Утешев А.Ю*. Полиномы и алгебраические уравнения от одной переменной. – http://pmpu.ru/vf4/polynomial.

18. *Утешев А.Ю*. Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.

19. *Василенко С.Л*. Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

20. *Василенко С.Л*. Квадратичные закономерности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15664, 21.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161579.htm.

21. *Василенко С.Л*. Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

22. *Howard F.T*. The Sum of the Squares of Two Generalized Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly, **41.1** (2003), 80–84.

23. *Девис П*. Суперсила / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 272 с.

24. *Lucas E*. The Theory of Simply Periodic Numerical Functions. – Fibonacci Association, 1969. – 78 p. – http://www.fq.math.ca/Books/Complete/simply-periodic.pdf / First published in the *American Journal of Mathematics*. – Vol. 1 (1878), pp. 184–240, 289–321.

25. *Roettger E.L.F*. A Cubic Extension of the Lucas Functions. – 2009. – http://math.ucalgary.ca/~hwilliam/files/A_Cubic_Extention_of_the_Lucas_Functions.pdf.

26. *Generalizations* of Fibonacci numbers // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations_of_Fibonacci_numbers#Tribonacci_numbers.

27. *Василенко С.Л*. О бедном квадрате замолвите слово... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

28. *Кузьмин О.В*. Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – 2000. – № 4. – С. 188–198.

29. *Василенко С.Л*. Кролики Фибоначчи на Великой китайской стене // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16102, 08.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161710.htm.

30. *Маркушевич А.И*. Возвратные последовательности. – М.: Гос. изд-во Технико-Теоретической Литературы, 1950. – 50 с.