С.Л. Василенко

В поисках математической гармонии мира

И воздастся каждому по делам его
/ Библия. Пс. 61:13; Мф. 16:27 /

Можно только приветствовать добрые слова оценки-памяти о польском журналисте Я. Гжедзельском[1] [1] – популяризаторе золотоносной темы-гармонии.

Тем более что он практически неизвестен среди "золотоискателей".

Действительно, за сухими математическими выкладками творческие люди способны увидеть нечто больше, чем просто арифметические или геометрические преобразования.

Их научно-художественные образы, пусть порой фантастические и некрепко аргументированные, придают исследованиям свежие импульсы, выводя мозговые центры на новые горизонты познания мира.

Что касается информационной насыщенности и новизне обзорного материала *Я.Г.*, то он содержит некоторые элементы, позволяющие задуматься-усомниться в их точности.

Пропаганда прогрессивных идей в области золотого сечения, несомненно, полезна.

Ещё более важная вещь – формирование положений, способных самостоятельно генерировать новые оригинальные направления исследований.

Это даёт повод-основание посмотреть на изложенные мысли *Я.Г.* несколько шире под разными углами.

Подобный настрой создаёт и предисловие к его книге «Энергетически-геометрический код природы» (Варшавский центр студенчества, 1986), в котором сказано: "Если критик работы Гжедзельского обнаружит ошибки в этой работе, то человек, который будет использовать эти аргументы, может облегчить себе путь к великим открытиям".

Мы далеки от мысли специального выискивания каких-либо погрешностей.

Наша задача – расширить изложение *Я.Г.* в максимальном приближении его подходов к современным реалиям их изученности и перспектив развития.

Пирамидальная тема

Размеры и конфигурация пирамиды Хеопса, возможно, содержат признаки золотой пропорции. В этом *Я.Г.* не оригинален.

Подобные мысли высказывались разными египтологами или просто знатоками и ранее.

Всё бы ничего, но достоверных свидетельств этому предположению нет. Даже если рассматривать "под лупой" [2].

Исследование геометрии пирамиды не дает однозначного ответа на вопрос о первоначальных пропорциях этого строения.

Высока вероятность, что размеры основания четырехгранной пирамиды закладывались из расчета достичь в процессе строительства иные простые формы согласно целочисленным отношениям, в частности 14/11 [3] – соотношение высоты к половине периметра основания (высота = 280 локтей, а основание = 2×220 локтей; 280/220 = 14/11).

Поскольку величина Ф – иррациональна, а согласно историческим материалам древние египтяне оперировали с целыми и рациональными числами, в работе [4] исследуется гипотеза об использовании в пирамиде простых целых соотношений типа 14/11.

«Предполагается, что оно символизирует "круговые" соотношения связанные с дробью 22/7, которая в древности, вероятно, могло использоваться в качестве целочисленного

---

[1] У нас нет уверенности в правильном и строгом написании польской фамилии Grzedzielski в русскоязычной транскрипции, как и в её произвольном варьировании [1]: Гржедзельский, Гржездельский, Грежздельский, Грежджельский, Греджиельский. – Во избежание ошибок далее ограничимся инициальным сокращением *Я.Г.*

аналога числа π». Попытка интерпретации пирамиды Хеопса с помощью золотого сечения (ЗС) пока остаётся лишённой надёжного историко-математического обоснования.

«Если рассматривать все пирамиды в совокупности (а не только одну пирамиду Хеопса), то открыть принцип их построения не так уж трудно, но он не будет иметь ничего общего с золотым сечением. Следует различать, что видели в пирамидах египтяне эпохи Древнего царства, и как их понимали египтяне во времена Геродота» [6, с. 299].

И, пожалуй, самое главное.

Даже если принять гипотезу о наличии ЗС в единственно взятой пирамиде Хеопса, то совершенно неясным остаётся вопрос: «А что и кому это собственно даёт?». – Как говорится, ни холодно, ни жарко.

В таком случае необходимы дополнительные интерпретации с усилением эффекта значимости. А их нет. Даже малейших намёков.

Разве что ублаготворяются амбиции золотоискателей налётом паутинки древности.

Будто мало, что золотое сечение на все 100 % явно присутствует уже в геометрии Евклида, который, в свою очередь, привнёс ЗС от своих предшественников.

Золотые эллипсы

Идея по выделению ЗС в плоских фигурах восходит ещё к античным учёным при изучении и построении правильного пятиугольника.

Поскольку золотая пропорция основана на отношении величин, то планиметрия с её двумя осями координат становится идеальным полем для проявления золотоносных свойств в их самых разных проявлениях.

Взять, к примеру, тот же прямоугольник с отношением сторон Φ или $\sqrt{\Phi}$.

Каждому такому прямоугольнику соответствует вписанный и описанный эллипс с тем же отношением большой и малой осей.

Не нужно быть семи пядей во лбу, чтобы данные прямоугольники и адекватные им эллипсы назвать "золотыми". В этом нет ни высокого полёта фантазии, ни особых склонностей к математическим открытиям.

Свой золотой эллипс *Я.Г.* увязывает с вписанными ромбами.

Но здесь возникают явные нестыковки.

«Золотой эллипс формируется с помощью двух ромбов, вписанных в эллипс» [1]. – Так не бывает.

Подробно данный вопрос ранее исследован в нашей работе [8].

Во-первых, эллипс не может формироваться с помощью ромбов, вписанных в то, чего ... еще нет.

Возможно, какие-то ромбы и получатся потом в процессе или после вычерчивания фигур. Но они являются следствием геометрических построений, а не их базисом.

Именно на это совершенно правильно указывал П. Сергиенко, утверждая, что подобное формирование эллипса алогично [8].

Во-вторых, в эллипс можно вписать только один ромб (!). Второй никак не встраивается[2], чтобы все его 4 вершины находились на эллипсе.

Именно так. Поскольку по определению в планиметрии *вписанный четырехугольник* – выпуклый четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности [9].

Итак, попробуем восстановить картину логическим путем с самого начала.

Как известно[3], основными метрическими характеристиками эллипса являются его полуоси (a, b).

---

[2] В любой эллипс можно вписать еще и квадрат (ромб с прямыми углами). Его вершины образуются как точки пересечения с эллипсом двух линий-диагоналей, проведенных через центр под наклонами $\pm 45^\circ$.

[3] Эллипс / Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=26663973.

По ним эллипс записывается в параметрическом виде: $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

Форма или вытянутость эллипса характеризуется безразмерным параметром – эксцентриситетом, равным отношению $e = \sqrt{1-k^2}$, $0 \le e < 1$, где $k = b/a$ – коэффициент сжатия или эллиптичность.

Когда e стремится к нулю, эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем величина e ближе к 1, тем он более вытянут.

Поэтому вполне естественно "золотистость" эллипса поставить в зависимости от e.

1. Самое простое решение получается, если отношение полуосей (эллиптичность) k положить равным золотому сечению (ЗС), с эксцентриситетом $e = \sqrt{\phi}$ (рис. 1)

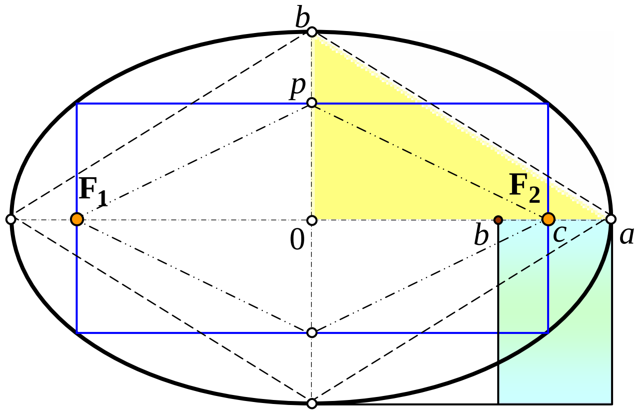


Рис. 1. Золотой эллипс с соотношением осей $k = \phi$

$$k = b/a = \phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618.$$

Данное свойство-отношение также порождает "золотоносную геометрию" в виде четырех золотых прямоугольных треугольников (ЗПТ), каждый из которых образуется между двумя соседними вершинами эллипса (точками его пересечения с осями) и центром 0.

Действительно гипотенуза $\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\phi^2}$ так относится к большему катету a как он – к меньшему b.

Опишем вокруг эллипса прямоугольник, стороны которого параллельны осям. Или восстановим все 4 ЗПТ до прямоугольников.

Каждый из этих прямоугольников построен по принципу золотого сечения с соотношением сторон $k = \phi$ и обладает одним замечательным свойством.

Отрезав от него квадрат, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон $k = \phi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{a}{b} - 1$. И так до бесконечности.

В образующие прямоугольники вписываются все новые и новые эллипсы (рис. 2)

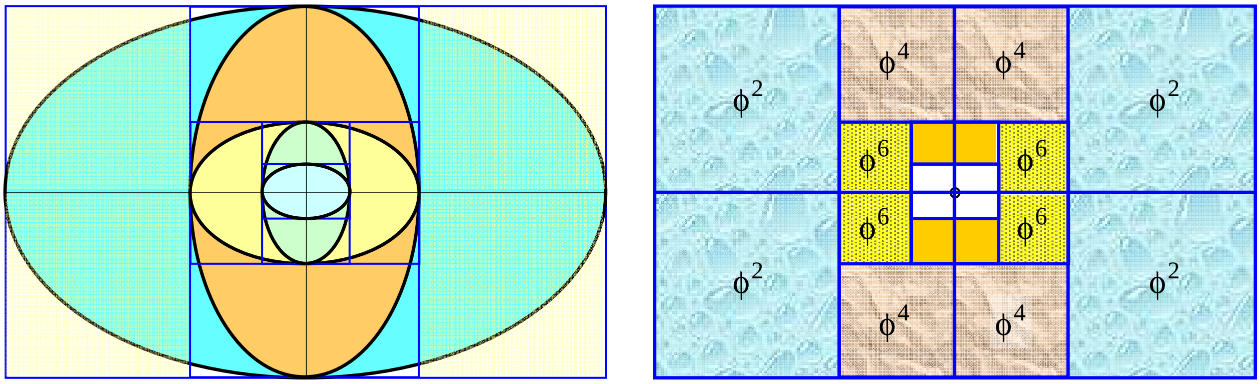


Рис. 2. Русская матрешка золотых эллипсов с соотношением осей $k = \phi$

Площадь эллипса равна $S=\pi ab$, периметр $L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt=4aE(e)$, где $e=\sqrt{1-k^2}$ – эксцентриситет эллипса, $E(e)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Отсюда следует, что в русской матрешке золотых эллипсов с соотношением осей $k=\phi$ периметры и площади эллипсов образуют геометрические прогрессии со знаменателями соответственно: ϕ и ϕ^2.

Это не единственный золотой эллипс. К тому же, возможно, он не вызывает исключительного доверия в виду некой гармонической незавершенности.

Взять, к примеру, тот же прямоугольник, вписанный в эллипс и проведенный через фокусы F_1 и F_2. Есть непреодолимое желание превратиться его в квадрат.

2. Приравняв между собой фокальный параметр $p=b^2/a$ и фокальное расстояние $c=ae$, находим $e=k^2=\sqrt{1-k^2}$, откуда $k=\sqrt{\phi}$ и $e=\phi$.

Положив для определенности большую полуось равной единице $a=1$, получаем следующее соотношение $e=c=p=\phi$, которое вкупе с чертежом (рис. 3) теперь также имеет все шансы, чтобы его называть золотым эллипсом.

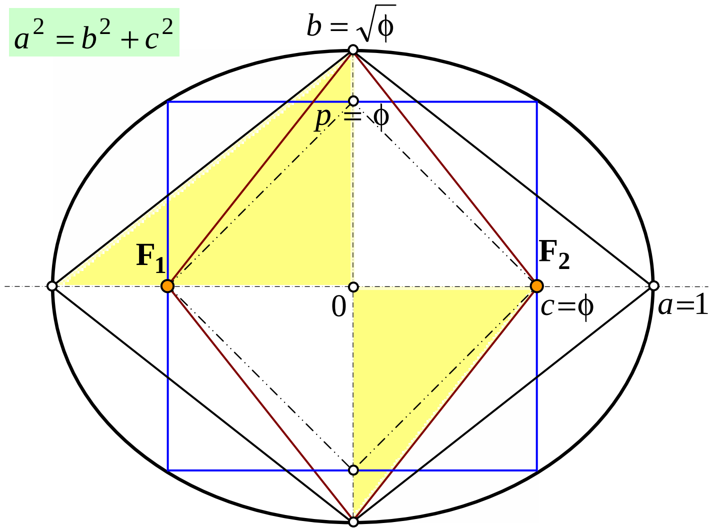


Рис. 3. Золотой эллипс с соотношением полуосей $b/a=\sqrt{\phi}$

Полуоси
$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\phi,\ (a,b)=\left(1,\sqrt{\phi}\right);$

эксцентриситет
$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\phi;$

фокальный параметр
$p=b^2/a=\phi;$

фокальное расстояние
$c=ae=\phi.$

Всё красиво, гармонично, пропорционально. Эксцентриситет e, фокальное расстояние c, фокальный параметр p и квадрат отношения полуосей k^2 равны числу золотого сечения.

Заметим, никаких ромбов или иных дополнительных фигур мы не использовали.

Все основано исключительно на обычных характеристиках самого эллипса.

А построение золотого эллипса получается донельзя элементарным: нужно окружность по одной из осей симметрии (допустим вертикальной) ужать в соотношении $1:\sqrt{\phi}$.

И вот теперь, когда установлены определяющие соотношения эллипса и выполнены основные построения, можно дополнительно исследовать его свойства.

В частности, по характерным узловым точкам эллипса мы видим 8 *золотых прямоугольных треугольников* (ЗПТ).

Первые четыре ЗПТ образуются соединением двух соседних вершин эллипса (точек его пересечения с осями) с центром 0. Их катеты относятся как $k=a/b=1/\sqrt{\phi}$.

Следующие четыре ЗПТ формируются соединением вертикальных вершин эллипса с одним из его фокусов и центром. Их катеты относятся как $k = b/c = \sqrt{\phi}/\phi = 1/\sqrt{\phi}$.

Таким образом, характерной особенностью золотого эллипса является (как следствие) наличие в нем восьми ЗПТ, формируемых характерными точками: вершинами, фокусами и центром эллипса.

Кроме того, из равенства $p = c$ следует, что единственный вписанный в эллипс квадрат проходит точно через его фокусы. Но, вернемся к вопросу о ромбах.

Примечательно, что в окружность можно вписать тысячи одинаковых квадратов.

Но при её сжатии вдоль вертикальной оси все они превращаются в параллелограммы.

Поэтому в любом эллипсе присутствует единственный вписанный ромб, вершины которого совпадают с вершинами эллипса.

Можно провести дополнительный, но уже не вписанный ромб: между вершинами на малой оси и фокусами.

Эти ромбы в данном случае оказываются подобными, как и слагающие их ЗПТ (в работе [8] некорректно утверждается обратное), поскольку соотношение катетов или полуосей ромбов равно: $\left(\frac{\sqrt{\phi}}{1} = \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{c}{b} = \frac{\phi}{\sqrt{\phi}}\right)$. Подобие становится наглядным и зрительно, если малый ромб мысленно повернуть вокруг центра на 90 градусов.

Теперь, когда произведены все расчеты и геометрические сравнения, можно вести речь и об альтернативном построении нашего эллипса, отталкиваясь от ромба.

Строим ромб, диагонали которого соотносятся как $\sqrt{\phi}$. Его вершины будут вершинами будущего эллипса. Поворачиваем ромб вокруг центра на 90 градусов и сжимаем по всем направлениям с коэффициентом масштабирования $\sqrt{\phi}$. На горизонтальной оси уменьшенный ромб даст нам фокусы эллипса. Дальше дело техники.

В таком изложении действительно можно вести речь о построении фигуры на основе ромба, диагонали которого форматируют оси эллипса.

3. Сравнивая два эллипса (рис. 1 и рис. 3), мы выявляем, что возможен также вариант, когда ромбы, вписанные в эллипс и прямоугольник, проведенный через фокусы, будут иметь равные углы, а их стороны параллельны. Этот случай характеризуется пропорцией:

$$k = \frac{b}{a} = \frac{p}{c},$$

откуда находим $k = 1/\sqrt{2}$.

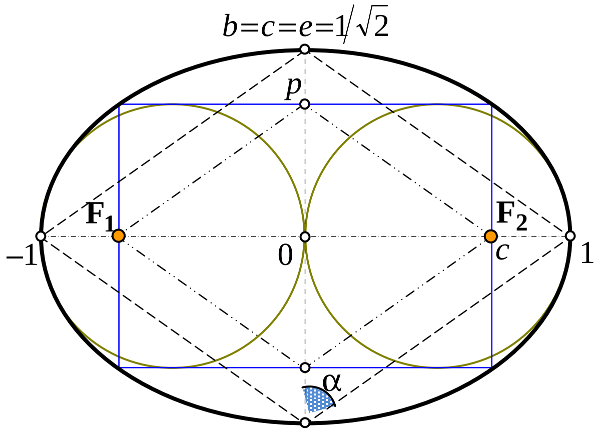


Рис. 4. Эллипс с коэффициентом сжатия (эллиптичностью) $k = 1/\sqrt{2}$

Положив для определенности $a = 1$, получаем значения остальных параметров:

$$p = 1/2, \quad b = c = e = 1/\sqrt{2}.$$

Угол α определяется из прямоугольного треугольника как (рис. 4).

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 54{,}74^{o}.$$

То есть тупой угол между вершинами составляет $2\alpha \approx 109{,}4^{o}$.

Это несколько больше, чем угол 108^{o} треугольника ЗС.

Решим обратную задачу и определим параметры эллипса так, чтобы угол 2α = 108° или $2\sin\alpha = \Phi = \phi^{-1}$. Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, находим $k = \sqrt{4\phi^2 - 1}$.

При таком соотношении k осей эллипса между его вершинами образуется равнобедренный треугольник ЗС с соотношением сторон $1:1:\Phi$.

4. Аналогичным образом в качестве опорной фигуры для эллипса можно выбрать золотой треугольник, образованный его вершиной и фокусами.

В этом случае условие изменится $\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+b^2}} = \sqrt{1-k^2}$, откуда $k = \sqrt{1 - \dfrac{\Phi^2}{4}}$.

Сказать что-либо определенное об относительном преимуществе полученных эллипсов нельзя. Они в равной мере могут называться золотыми (рис. 5, для удобства представления фигуры повернуты на 90°).

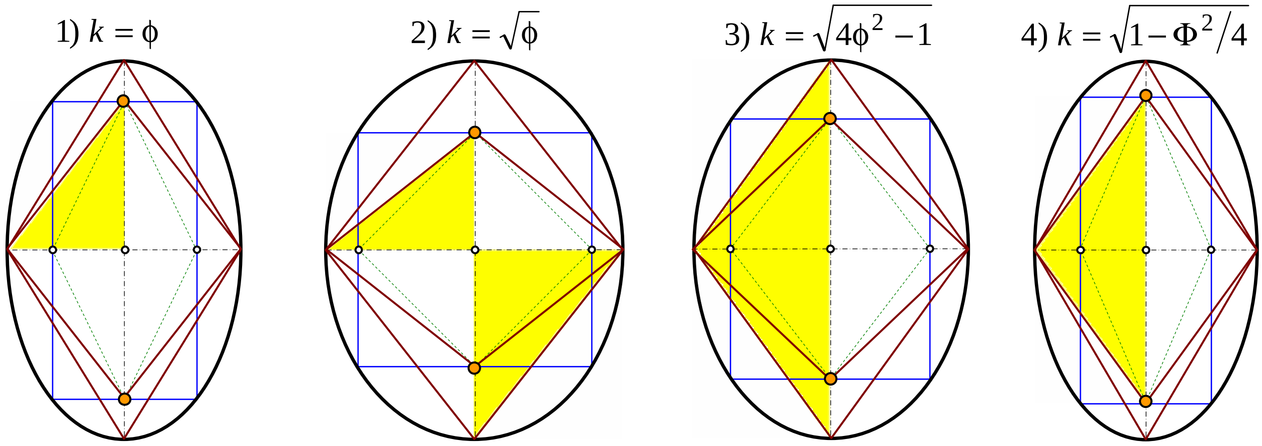


Рис. 5. Золотоносные эллипсы, содержащие золотые треугольники:
1) 4 ЗПТ, образованные вершиной, фокусом и центром эллипса;
2) 4 ЗПТ, образованные вершиной, фокусом и центром эллипса плюс 4 ЗПТ, соединяющие две соседние вершины с центром;
3) 2 золотые треугольника, образованные тремя вершинами;
4) 2 золотые треугольника, образованные вершиной на меньшей оси и фокусами.

Возможно, все-таки второй эллипс является более предпочтительным, поскольку содержит 8 золотых прямоугольных треугольника. А единственный вписанный квадрат проходит через фокусы. Но это дело вкуса.

Лемниската Бернулли

Лемниската Бернулли – плоская алгебраическая кривая, определяемая как геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух заданных точек-фокусов постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами.

Если фокусы расположены на оси *OX* симметрично от начала координат на расстоянии между ними 2*c*, то явное уравнение лемнискаты имеет вид [10]

$$y(x) = \pm\sqrt{\sqrt{c^4 + 4x^2c^2} - x^2 - c^2}\,.$$

Легко увидеть, что для определённых условий значение функции становится зависимым от корня из пяти – явного признака константы ЗС.

При $c = 1$ абсолютное значение функции в фокусах равно $y(F_i) = \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{\phi^3}$.

Расстояние от одного фокуса F_1 до точки лемнискаты в другом фокусе $y(F_2)$ определяется по теореме Пифагора и равно $\sqrt{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{\Phi^3}$.

Это и есть количественные признаки константы ЗС.

Заметим, что так такового «золотого сечения в лемнискате Бернулли», как это утверждает *Я.Г.*, де-факто на содержательном уровне нет.

Но имеет место наличие отрезков, длина которых численно зависит от константы золотого сечения Φ (рис. 6).

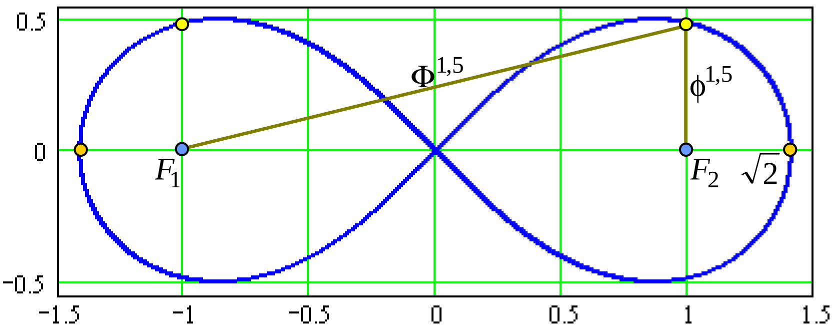


Рис. 6. Константа золотого сечения Φ на лемнискате Бернулли: полурасстояние между фокусами (F_1, F_2) равно $c = 1$

Представляет интерес совместить фокусы эллипса и лемнискаты (рис. 7).

Положим полурасстояние между фокусами (фокальный радиус) равным $\sqrt{\Phi}$.

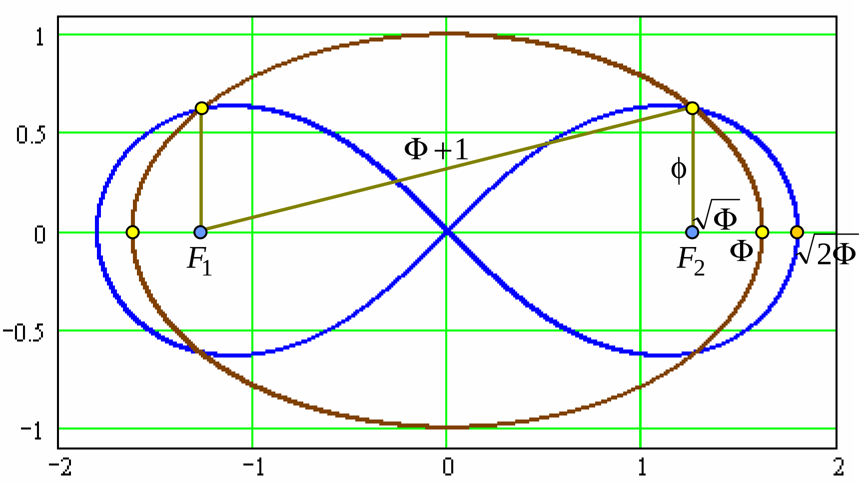


Рис. 7. Совмещение фокусов эллипса и лемнискаты Бернулли: полурасстояние между фокусами (F_1, F_2) равно $c = \sqrt{\Phi}$

Параметры эллипса:

- полуоси $(a, b) = (\Phi, 1)$;
- фокальный параметр (значение функции в точке фокуса) $p = b^2/a = \phi$;
- эксцентриситет (характеристика вытянутости) $e = \sqrt{1 - (b/a)^2} = \sqrt{\phi}$.

Тогда для любой точки эллипса сумма расстояний до фокусов постоянна и равна $(\Phi+1)+\phi=2\Phi$. Соответственно для любой точки лемнискаты произведение расстояний до фокусов постоянно и численно равно $(\Phi+1)\cdot\phi=\Phi\cdot 1$.

Псевдослучайные числа

Историко-терминологические линии. В работе [1] представлена описанная в книге *Я.Г.* (1986) "железная таблица" случайных чисел Г. Штейнгауза. Это повторяется и в монографии [11, с. 75–77].

Надо сказать, что польский математик Г. Штейнгауз (в отличие от *Я.Г.*) очень хорошо и давно известен русскому читателю по многим работам [12–15], в том числе и 40 лет своей "железной таблицей", с которой можно ознакомиться в оригинале (1972) [15, с. 47–53].

Кстати, "железный" окрас-эпитет, на наш взгляд, здесь малообоснован.

Более подходящим названием мог бы стать привычный термин «генератор (таблица) псевдослучайных целых чисел».

И уже вовсе некорректно называть величины $n\Phi$, кратные константе Φ, *золотыми числами* (?) [15, с. 50].

Это привносит путаницу в математические определения, в конечном итоге порождая неразбериху, ибо золотые числа (Φ, ϕ) в математике уже есть.

Мы же не называем π-числами: $10\cdot\pi$ или π^2.

Подобные вольности нежелательны и при обращении с научным понятием ЗС.

Они должны стать предметом аргументированного оппонирования, ибо де-факто нивелируется понятийная и теоретическая основа ЗС.

На наш взгляд, подобные терминологические обороты бесконечного множества конкретных чисел не усиливают, а напротив, ослабляют и без того не очень устойчивые позиции ЗС в науке.

Описание алгоритма. Образуем бесконечную последовательность величин, кратных ϕ

$$z_n=\{n\cdot\phi\},\ \ n=1,\,2,\,3...$$

Ни одно из чисел z_n не имеет дробной части d_n, равной нулю, и никакие два числа не имеют одинаковых дробных частей [15, с. 51].

Выберем из последовательности $\{z_n\}$ первые N чисел.

Сформируем матрицу A размером $N\times 2$: $A_{n,1}=n.$; $A_{n,2}=d_n$.

Выполним сортировку строк матрицы A выстраиванием элементов 2-го столбца в порядке возрастания. В первом столбце по-прежнему будут находиться все числа от 1 до N.

Только теперь они расположены не в порядке возрастания, а преимущественно случайным образом с равномерной функцией распределения (табл. 1).

Поиск закономерностей. Примечательно, что все примеры из табл. 1 начинаются и заканчиваются числами Фибоначчи $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $(F_0, F_1)=(0, 1)$.

Объяснение этому факту очень простое: величины

$$\phi F_n=\phi\frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}=\frac{\Phi^{n-1}+(-\phi)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

максимально приближены к целым числам, и в результате ранжирования дробных частей они автоматически попадают на края монотонно возрастающей последовательности.

Так, $\phi F_{20}=4180{,}99993$; $\phi F_{21}=6765{,}00004$.

Таблица 1

Псевдослучайные 2,3,4,5-значные числа с равномерной плотностью распределения, сформированные в соответствии с дробной частью золотого сечения

89	**34**	68	13	47	81	26	60	05	94	39	73	18	52	86	31	65	10	99	44
78	23	57	02	91	36	70	15	49	83	28	62	07	96	41	75	20	54	88	33
67	12	46	80	25	59	04	93	38	72	17	51	85	30	64	09	98	43	77	22
56	01	90	35	69	14	48	82	27	61	06	95	40	74	19	53	87	32	66	11
100	45	79	24	58	03	92	37	71	16	50	84	29	63	08	97	42	76	**21**	**55**

610	**233**	843	466	089	699	322	932	555	178
788	411	034	644	267	877	500	123	733	356
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
254	864	487	110	720	343	953	576	199	809
432	055	665	288	898	521	144	754	**377**	**987**

4181	8362	**1597**	5778	9959	3194	7375	0610	4791	8972
2207	6388	3804	7985	1220	5401	9582	2817	6998	0233
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
6532	3948	8129	1364	5545	9726	2961	7142	0377	4558
8739	1974	6155	3571	7752	0987	5168	9349	**2584**	**6765**

75025	**28657**	57314	10946	85971	39603	68260	21892	96917	50549
04181	79206	32838	61495	15127	90152	43784	72441	26073	54730
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
95320	48952	02584	77609	31241	59898	13530	88555	42187	70844
24476	99501	53133	06765	81790	35422	64079	**17711**	92736	**46368**

Неоспоримым преимуществом "золотого" генератора является способность образовывать небольшие выборки случайных чисел, равномерно распределенных на заданном интервале, что непосредственно следует из характера последовательностей (рис. 8).

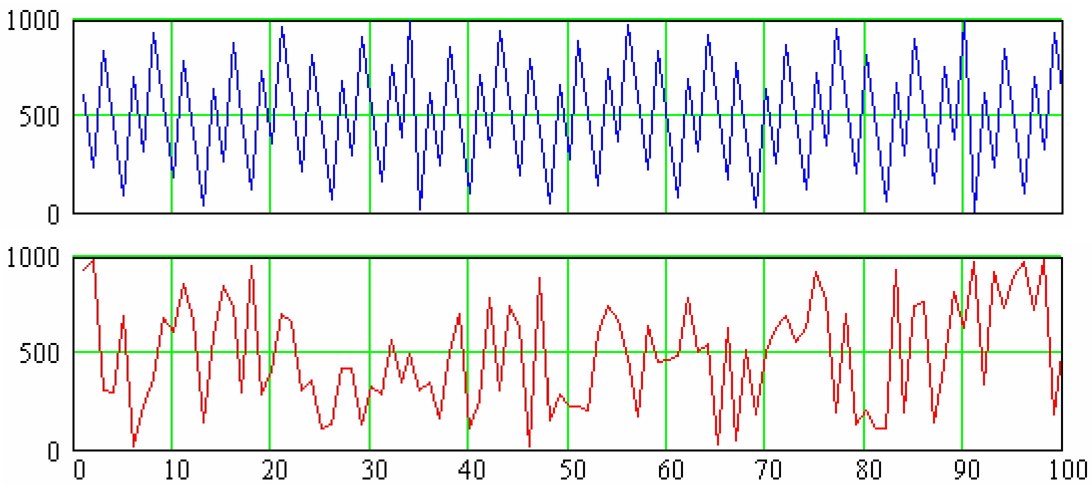


Рис. 8. Выборки псевдослучайных чисел с равномерной плотностью распределения:
вверху – с помощью "золотого генератора"
внизу – компьютерная программа Randu в среде MathCad

В каком бы месте мы не вырезали ограниченную выборку (рис. 8, верхний график), она удивительным образом формирует, хотя и случайное, но достаточно равномерное заполнение интервала, в котором варьирует переменная (случайная функция).

Одним из тестов для определения равномерности является *проверка на монотонность*, исходя из анализа отсортированных неубывающих подпоследовательностей.

Простая визуальная проверка (рис. 9) показывает высокую эффективность "золотого" генератора: случайные числа выстраиваются равномерно (достаточно близко по диагонали).

Плотность распределения практически линейна.

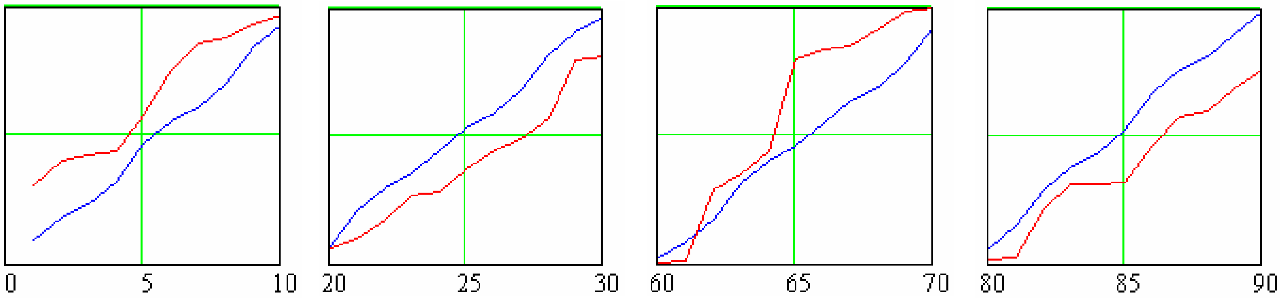


Рис. 9. Проверка монотонности упорядоченных выборок (по 10 значений) псевдослучайных чисел с равномерной плотностью распределения

Алгоритмические закономерности. Благодаря уникальным свойствам ЗС и чисел Фибоначчи формирование таблицы случайных чисел происходит не совсем хаотически, а подчиняется определенным детерминистическим правилам.

Они сравнительно легко узнаваемы и устанавливаются путем анализа взаимосвязей при последовательном увеличении размерности вектора псевдослучайных чисел [16].

Рекуррентно-циклические свойства легко просматриваются, если длину последовательности случайных чисел определять числами Фибоначчи.

В частности, несомненный интерес представляет выявленная нами закономерность при построении вектора случайных чисел размерностью, равной числу Фибоначчи F_n.

При фиксированном значении n вектор v длиной F_n формируется по простой схеме:

$$v_{tF_{n-1} (\mathrm{mod}\ F_n) + c} = t\,, \tag{1}$$

где $c = n\,(\mathrm{mod}\ 2)$, $t = \overline{1, F_n - 1}$; $\quad v_1 = F_n \quad \text{if} \quad d = 1, \qquad v_b = F_n \quad \text{if} \quad d = 0$.

Здесь каждое из последовательных натуральных чисел t ставится строго на обусловленное место (вектора v).

Надлежащий индекс определяется через взятие по модулю F_n произведения tF_{n-1}.

Такой алгоритм гарантированно сходится для любого натурального n.

Это непосредственно следует из того, что «соседние числа Фибоначчи взаимно просты» [17, с. 45], то есть, у них нет общих делителей[4], кроме 1.

Действительно, если F_{n-1}, F_n имеют общий делитель $d > 1$, то и разность $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ делится на d, а значит, по индукции делятся на d и числа $F_{n-3}, F_{n-4} \ldots F_1 = 1$, что приводит к противоречию.

Выше в необходимых ячейках последовательно расставлялись натуральные числа от 1 до F_n.

Но такую расстановку можно осуществлять и в несколько ином порядке, например

$$v_{tF_{n-z} (\mathrm{mod}\ F_n) + d} = tF_z\ (\mathrm{mod}\ F_n)\,. \tag{2}$$

[4] Наибольший общий делитель (НОД) равен $\gcd(F_n, F_{n-1}) = 1$.

Необходимым условием здесь является: нечетность $z = 2m + 1 < n$ и взаимная простота пары чисел $\gcd(z, n) = 1$.

Вообще-то, строго говоря, требуется взаимная простота чисел Фибоначчи, но хорошо известно [17, с. 46], что F_z делится на F_n тогда и только тогда, когда z делится на n. Поэтому о делимости чисел Фибоначчи можно судить по делимости их порядковых номеров.

Соотношение (2) – более общее и включает в себя (1) при $z = 1$, то есть оно отличается многообразием формирования массива псевдослучайных чисел.

Но можно пойти и по пути некоторого упрощения вычислительной процедуры и ее представления в более привычном для нас рекуррентном виде с последовательным нарастанием нижнего индекса:

$$v_{t+1} = (v_t + a)(\mathrm{mod}\ F_n), \tag{3}$$

где начальные условия определяются по четности-нечетности числа n

$$\begin{cases} (v_1, a) = (F_{n-1}, F_{n-1}), & n = 2s; \\ (v_1, a) = (F_n, F_{n-2}), & n = 2s+1. \end{cases}$$

Из рассмотренных вариантов это, пожалуй, наиболее простая и удобная для реализации рекуррентная форма.

На краях вектора-массива v находятся соседние числа Фибоначчи так, что для нечетных значений n концы интервала замыкают числа (F_n, F_{n-1}), для четных значений n – числа (F_{n-1}, F_n). Например, $n = 5$: $v = (\mathbf{5}\ 2\ 4\ 1\ \mathbf{3})$; $n = 6$: $v = (\mathbf{5}\ 2\ 7\ 4\ 1\ 6\ 3\ \mathbf{8})$.

Анализируя полученные последовательности отдельно для четных и нечетных параметров n, нетрудно отметить похожесть в следовании элементов ряда v в прямом и обратном направлении.

Но формирование данным способом рядов не является догмой, и нам ничего не мешает для нечетных значений n элементы ряда расположить в обратном порядке.

Этим самым мы добиваемся определенной унификации (типизации) в построении последовательностей.

Более того, существенно упрощается запись расчетной формулы, объединяя в себе одновременно черты аналитического и рекуррентного представления:

$$v_t = F_n - tF_{n-2}(\mathrm{mod}\ F_n), \quad t = \overline{1, F_n}. \tag{4}$$

С точки зрения ГСЧ формула (4) замечательна во многих отношениях:

1. Прежде всего, выстраиваемые ряды теперь имеют похожее строение, начиная и заканчиваясь числами (F_{n-1}, F_n).

2. Максимальным значением каждой последовательности является F_n, поэтом нормированные положительные числа v'_t не превышают единицы

$$v'_t = \frac{v_t}{F_n} = 1 - \frac{tF_{n-2}(\mathrm{mod}\ F_n)}{F_n} \le 1.$$

Переходя к пределу $F_{n-2}/F_n \to \phi^2$ и используя тождество $\phi = 1 - \phi^2$, можно как бы вернуться к исходной точке рассуждений, записав генератор бесконечного числа неповторяющихся десятичных чисел, равномерно распределенных на интервале (0, 1) и начинающихся с точного значения числа ЗС $\phi \approx 0{,}618$:

$$v_t = t\phi \pmod 1 = 1 - t\phi^2 \pmod 1.$$

3. Последовательности обладают интересными свойствами, в частности (k = 1, 2, 3…),

$$v_k + v_{F_n - k} = v_{F_n}.$$

4. Период может быть настолько длинным, насколько это необходимо, чем собственно удовлетворяются любые практические потребности.

5. Ряды достаточно хорошо структурированы, имея выраженные признаки организованной хаотичности.

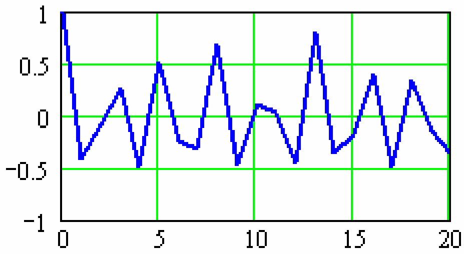


Рис. 10. Автокорреляционная функция "золотого" генератора псевдослучайных чисел

Особо отметим, что подобная структурированность не должна нас нисколько настораживать, ибо мы не собираемся их использовать для скрытых (тайных) шифров. Понятно, что для целей, предполагающих режимы секретности, данные алгоритмы не предназначены.

В то же время автокорреляционная функция (рис. 10) свидетельствует о статистически значимой корреляции чисел. Это и не удивительно, принимая во внимание детерминированный характер алгоритма.

Практические аспекты. Направленность исследований имеет ярко выраженное прикладное значение.

"Золотой" генератор псевдослучайных равномерно распределенных чисел обладает аналитико-рекуррентной формой и легко реализуется на практике, особенно для последовательностей, длины (периоды) которых равны заданным числам Фибоначчи:

$$v_t = F_n - tF_{n-2} \pmod{F_n}, \quad t = \overline{1, F_n}.$$

Термин "золотой" подчеркивает тот факт, что отношение крайних членов последовательности (F_{n-1}, F_n) стремится к числу золотого сечения Φ.

Простота алгоритма в данном случае высвечивает преимущество, ибо сложный алгоритм ещё не означает хороший генератор.

Главным достоинством "золотого" ГСЧ является *монотонность* отсортированных неубывающих подпоследовательностей. – Значит, для отдельных коротких выборок их среднее и мода во всех случаях будут максимально приближены к середине интервала.

Метод характеризуется простотой реализацией и приемлемыми статистическими характеристиками случайных чисел.

К отрицательным моментам подобных псевдослучайных рядов следует отнести статистическую значимость значений автокорреляционной функции, что ограничивает их эффективное использование в динамических структурах.

Можно сказать, что здесь присутствует структурированная или хорошо организованная (спланированная) хаотичность.

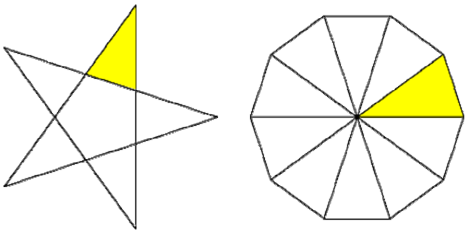
Детерминированного здесь явно больше чисто случайного.

В целом числовые последовательности, сформированные "золотым" генератором, практически самоподобны отдельным своим структурным выборкам.

Это означает, что вырезанные случайным образом небольшие совокупности исходных данных довольно точно (в статистическом смысле) воспроизводят (повторяют) свойства генеральной выборки.

Разработанный метод формирования псевдослучайных чисел может также оказать незаменимую пользу при воспроизведении повторяющихся числовых экспериментов.

Золотые и гармоничные треугольники



1) <u>Золотым треугольником (классическим)</u> в математике исторически назвали [18] равнобедренный треугольник с соотношением сторон Ф.

Он наглядно проявляется, например, в пятилучевой звезде и правильном десятиугольнике.

Угол при основании равен 72 градуса и в два раза больше угла при вершине.

Его построение восходит ещё к Евклиду.

<u>*Предложение* 4.10</u>. Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании, вдвое большим остающегося (рис. 11) [5, с. 132–133].

1. Проводим прямую AB и отмечаем на ней точку C – золотого сечения (ЗС) в современной терминологии.

2. Описываем окружность $AB(A)$ – радиусом AB вокруг центра A.

3. Описываем окружность $CA(C)$.

4. Через их точку пересечения проводим отрезки AD, CD и BD.

Получаем равнобедренный треугольник ΔABD, у которого углы при основании B и D вдвое больше угла при вершине A, то есть соответственно равны: 72°, 72°, 36°.

У Воробьева [17, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения*.

Хотя в сокращенном варианте они называются просто золотыми [18, 19].

Если больший отрезок AC условно принять за 1, то меньший станет равен $\phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, и все стороны приобретают реальные размерности (рис. 12).

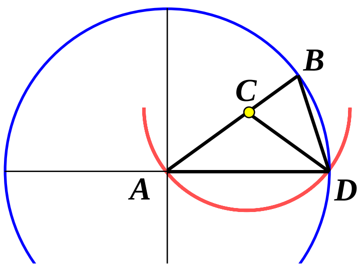


Рис. 11. Геометрические построения к Предложению 4.10 Евклида (о треугольниках ЗС – в современной интерпретации)

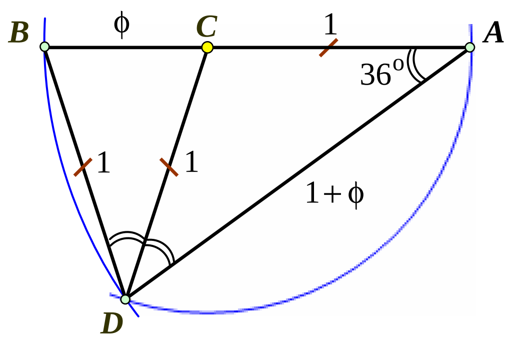
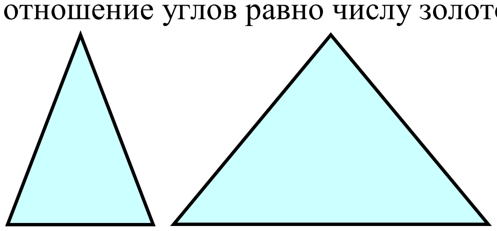


Рис. 12. Треугольники ЗС

2) С. Кимберлинг (1991) определил <u>второй тип золотого треугольника</u> [20], в котором отношение углов равно числу золотого сечения Ф.



Обозначив углы при вершине и основании соответственно через α и β, получаем два варианта

$$\alpha \mid \beta = \phi \cdot \beta \mid 180/(\phi+2) \approx 42{,}49 \mid 68{,}75 \;;$$

$$\alpha \mid \beta = \Phi \cdot \beta \mid 180/(\Phi+2) \approx 80{,}50 \mid 49{,}75 \;.$$

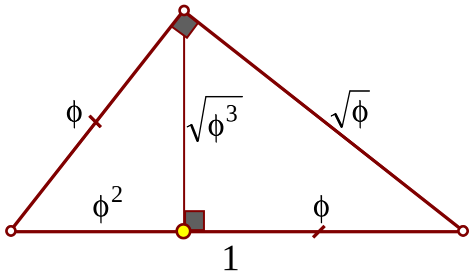
3) <u>Треугольник Кеплера</u>. В статье [1] отмечается, что современная теория ЗС, например, в работах П. Сергиенко широко использует понятие "гармоничного" или "золотого" прямоугольного треугольника. Упоминание о нём имеется в книге Н. Васютинского «Золотая пропорция» (1990). А задолго до этого это понятие введено (1986) в книге *Я.Г.*

Нет возражений против такой хронологии.

Однако информация явно неполная.

Ибо такой треугольник уже давно назван в честь немецкого математика и астронома Йоганна Кеплера (1571–1630)[5], который первым продемонстрировал, что эта фигура характеризуется отношением между гипотенузой и меньшим катетом, в виде золотой пропорции [21, 22].

Этот треугольник объединяет две математических концепции – теорему Пифагора и золотое сечение, что глубоко впечатлило Кеплера.



В письме профессору Михаэль Мастлину он писал[6]: «Если на <прямолинейном> отрезке, который делится в крайнем и среднем отношении, построить прямоугольный треугольник так, чтобы прямой угол находился на перпендикуляре к точке деления, то меньшая сторона <треугольника> будет равна большей части разделенного отрезка».

Строится треугольник сравнительно просто (рис. 13).

Сторона квадрата единичной длины делится пополам.

Из точки деления O проводится дуга, отсекая на продолжении стороны величину Ф.

Этим раствором циркуля чертится дуга (с центром C) до пересечения с продолжением противоположной стороны квадрата

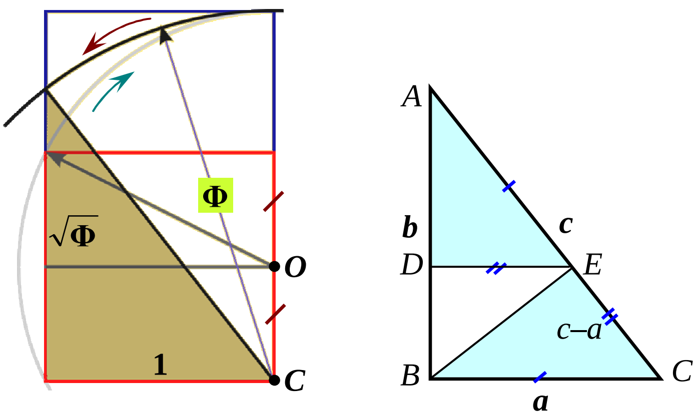


Рис. 13. Построение гармоничного треугольника Кеплера и его пропорции

В результате такого построения стороны треугольника соотносятся в геометрической прогрессии: $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

В работе [3] он описан на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 13).

Но, пожалуй, самым главным свойством треугольника является "золотая" пропорция его сторон (!)

$$a:b=b:c.$$

Равенство вытекает из подобия прямоугольных треугольников ABC и ABE. Тем самым больший катет b золотого треугольника является средним пропорциональным между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

Данная пропорция путем перемножения приводится к виду $b^2 = ac$: квадрат большего катета равен произведению меньшего катета на гипотенузу.

Геометрически (по Евклиду) это означает, что прямоугольник, заключенный между гипотенузой и меньшим катетом, равен квадрату на большем катете.

В качестве единичной меры можно принять любой из катетов или гипотенузу (рис. 14) и получить три подобных треугольника [7].

А из них легко складывается один равнобедренный треугольник.

На наш взгляд, он вполне может также называться "золотым".

---

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle.

[6] «If on a line which is divided in extreme and mean ratio one constructs a right angled triangle, such that the right angle is on the perpendicular put at the section point, then the smaller leg will equal the larger segment of the divided line». – http://www.moscowbooks.ru/pod/book.asp?id=459959.

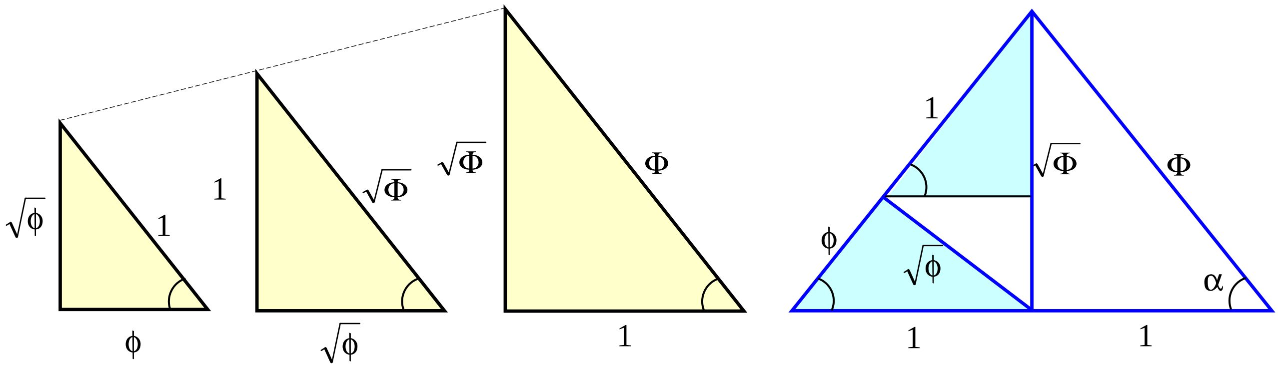


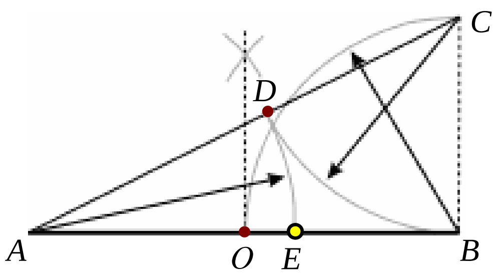
Рис. 14. Золотые прямоугольные треугольники –
частный случай гармонических треугольников $a : b = b : c$ или $b^2 = ac$

Угол при основании равен $\alpha = \arcsin\sqrt{\phi} = 0{,}905 \approx 51{,}83^{\circ}$, при вершине $\beta = \arcsin\phi \approx 0{,}666 \approx 38{,}17^{\circ}$.

Подводя логический итог, напрашивается полное название: *прямоугольный золотой* (*гармонический*) *треугольник Кеплера*.

4) Золотообразующий треугольник. Говоря о золотом сечении, нельзя не упомнить его широко известное геометрическое построение на основе прямоугольного треугольника с соотношением катетов $1:2$.

Де-факто он просматривается при делении квадрата пополам (см. рис. 13).



Золотое сечение отрезка AB осуществляется в такой последовательности (с промежуточным построением ΔABC):

деление исходного отрезка AB пополам:

произвольные дуги (A) и (B), $\perp O$;

дуга $OB(B) \to \bullet C$ ($CB \perp AB$):

дуга $CB(C) \to \bullet D$;

дуга $AD(A) \to \bullet E$ – точка золотого сечения.

Таким образом, прямоугольный треугольник ΔABC со сторонами $1:2:\sqrt{5}$ вполне подходит под категорию золотообразующей фигуры.

5) Гармонические треугольники. Во многих работах с пафосом, но часто неубедительно гармонию увязывают с золотым сечением. Нет смысла опровергать этот "заезженный" и слабо аргументированный миф хотя бы потому, что в мироздании наличествуют миллиарды иных проявлений пропорции, симметрии, эквивалентности и т.п.

Тем не менее, применительно к треугольникам, ЗС заслуживает отдельного рассмотрения.

Не будет большой ошибкой утверждать, что сколь пространна область восприятия гармонии, столь широка сфера восприятия и принятия характеристик гармоничности треугольников. Главное не вдаваться в частности. А если и акцентировать на них внимание, то не предлагать в качестве обобщения или универсальности.

Так, в работе [23] область гармоничности ограничивается только прямоугольным треугольником, в котором «гипотенуза относится к большему катету так, как больший катет относится к меньшему катету».

Подобный треугольник может быть отнесен к типу гармоничных фигур, но выставлять его в виде общего определения, на наш взгляд, нельзя. – Весьма узко все сводить к ЗС.

Это вполне приемлемый, но все-таки частный случай ("золотой" треугольник Кеплера), не подходящий для универсального определения.

Рассматривая задачу золотого сечения и выполняя правила построения математической пропорции, вполне закономерно расширить их сферу влияния на образующие элементы треугольника, в частности, на его стороны [24]:

Определение. Плоский треугольник называется гармоническим, если квадрат его стороны численно равен произведению двух других сторон.

На языке формул это означает:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{или} \quad b^2 = ac\,.$$

Зададим для определенности одну из сторон, равной отрезку единичной длины, например $c = 1$.

Непосредственная зависимость координат y и x имеет вид (рис. 15):

$$y^2 = u + \sqrt{u^2 - (1-x)^4 + x^2}\,, \quad u = \frac{1}{2} - (1-x)^2\,.$$

С целью сопоставления асимметрий приведена окружность единичного радиуса и центром в точке (3/2, 0).

Кривую $C_1 \ldots C_7$ назовем резольвентой Вассера[7] гармонических треугольников.

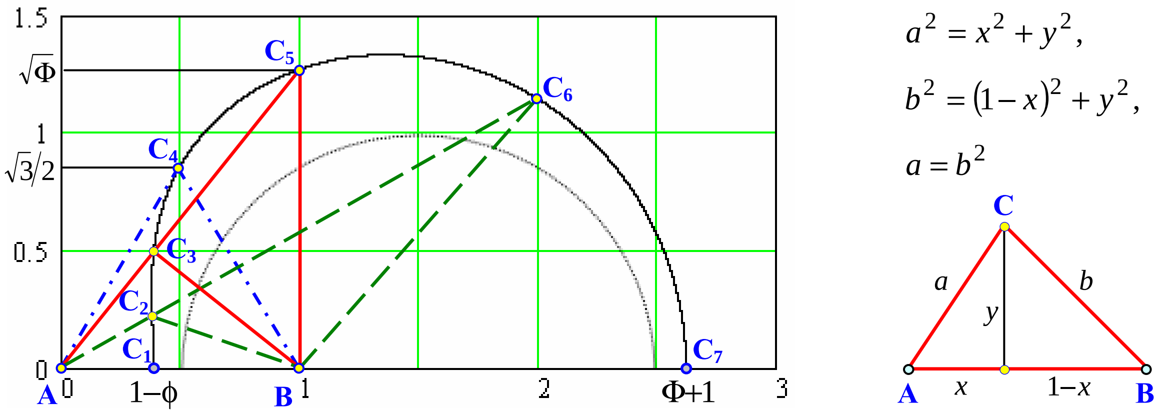


Рис. 15. Резольвента Вассера $C_1 \ldots C_7$ гармонических треугольников AC_iB

Задавая точку на резольвенте и соединяя ее с началом координат и точкой $B(1, 0)$, получаем неограниченное множество гармонических треугольников.

Условие образование треугольника: $a + b > c$ или $b^2 + b > 1$, то есть $b > \phi$.

Отрезок прямой AB превращается в треугольник ACB, то есть добавляется новое измерение.

Примечательно, что гармонический треугольник общего вида. В трёх частных случаях он становится равносторонним AC_4B или прямоугольным AC_3B, AC_5B (Δ Кеплера).

Но, пожалуй, самым примечательным является развитие золотоносной конструкции в части многомерного обобщения золотой пропорции, основанного на числе Φ [25]:

равносторонний треугольник – предельная модель ($n \to \infty$) золотой пропорции

$$x = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}, \quad c^n = a^n + b^n \quad \Rightarrow \quad x^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \Phi\,.$$

---

[7] *Вассер*: Василенко Сергей – гидролог-системотехник. Wasser (нем.) – вода, влага, жидкость и т.п.

Краткие итоги

Говоря в целом, книга *Я.Г.* больше популяризирует идеи золотого сечения, чем развивает новые положения.

1. Тема золотого сечения в пирамиде Хеопса не нова. К тому же она не имеет надёжного историко-математического обоснования.

2. Золотой эллипс некорректно увязывается с двумя вписанными ромбами. С точки зрения построения возникают нестыковки: а) эллипс не может формироваться с помощью ромбов, вписанных в то, чего ... еще нет; б) в эллипс можно вписать только один ромб.

В зависимости от исходных предпосылок можно построить множество разнообразных золотоносных эллипсов, содержащие золотые треугольники.

3. Лемниската Бернулли – удачная находка *Я.Г.*, в которой отчётливо проявляются свойства константы ЗС. Весьма интересно совмещение фокусов лемнискаты и эллипса.

4. "Железную таблицу" псевдослучайных чисел следует смотреть в оригинале Г. Штейнгауза. В процессе её изучения нами получены новые результаты по формированию практически полезных алгоритмов – генераторов чисел. Последовательности имеют равномерное распределение, самоподобны. В них осутствуют повторяющиеся числа.

5. Построение золотого равнобедренного треугольника с углами ($36^o, 72^o, 72^o$) восходит ещё к Евклиду (предложение 10, книга 4). Золотой прямоугольный треугольник со сторонами $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$ впервые описан Кеплером (1571–1630) и носит его имя.

В развитие данной темы предложены гармонические треугольники общего вида, основанные на резольвенте Вассера. В частности, они включают: обычное золотое сечение (острые углы треугольника → 0) и два прямоугольных треугольника Кеплера.

Венцом развития золотоносной конструкции в части многомерного обобщения, основанного на числе Ф, является равносторонний треугольник как предельное выражение золотой пропорции. – С многообещающим выходом на полезные модели мироздания.

Литература:

1. *Стахов А.П.* Овалы Кассини, лемниската Бернулли, "золотой" прямоугольный треугольник, "золотой" эллипс и другие "золотые" идеи Яна Грежздельского // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17318, 16.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321109.htm.

2. *Василенко С.Л.* Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.

3. *Щетников А.И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. – 2006. – № 3 (38). – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

4. *Радзюкевич А.В.* Ещё одна гипотеза о размерах и пропорциях пирамиды Хеопса // Журнал о дизайне и архитектуре a3d.ru. – Новосибирск, 2006. – http://a3d.ru/architecture/stat/188.

5. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

6. *Начала Евклида*. Книги XI–XV: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.

7. *Василенко С.Л.* Золотоносные жилы в планиметрии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16086, 25.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161705.htm.

8. *Сергиенко П.Я.* Обзор-4. Сакральная геометрия «золотых сечений» «золотого эллипса» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13638, 09.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00161288.htm.

9. *Словарь* терминов планиметрии // Википедия. Дата обновления: 21.05.2010. http://ru.wikipedia.org/?oldid=24754382.

10. *Лемниската* Бернулли // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=38959870.

11. *Stakhov A.* Mathematics of Harmony: from Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – World Scientific Publishing Company, 2009. – 748 p.

12. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп / Пер. с польск. – М.: Наука, 1981. – 160 с. – http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-kvant/kvant8.htm.

13. *Штейнгауз Г.* Математика – посредник между духом и материей / Пер. с польск.. – М.: Бином, 2005. – 351 с.

14. *Штейнгауз Г.* Сто задач: 2-е изд. испр. и доп. / Пер. с польск. – М.: Наука, 1976. – 168 с. – http://www.e-reading.org.ua/djvureader.php/134836/1/Shteiingauz_-_Sto_zadach.html.

15. *Штейнгауз Г.* Задачи и размышления / Пер. с польск. – М.: Мир, 1972. – 400 с.

16. *Василенко С.Л.* "Золотой" генератор псевдослучайных чисел // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16099, 07.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161709.htm.

17. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

18. *Bicknell M.*, *Hoggatt V.E.Jr.* Golden Triangles, Rectangles, and Cuboids // Fib. Quart. **7**, 73–91, 1969.

19. *Weisstein E.W.* Golden Triangle // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

20. *Kimberling C.* A New Kind of Golden Triangle // In Applications of Fibonacci Numbers: Proceedings of the Fourth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Wake Forest University. – Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 1991. – P. 171–176.

21. *Livio Mario.* The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – p. 149.

22. *Herz-Fischler R.* The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 293 p.

23. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. Начала математики гармоничного мира (Русский проект) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15356, 21.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321124.htm.

24. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: гармонические треугольники // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

25. *Василенко С.Л.* Главная тайна золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17178, 04.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.

www.trinitas.ru