С.Л. Василенко

Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 5. Расширение структур

Вначале было число, и имя ему ничто.
Потом было слово, и имя ему всё.

По мере наших исследований формируется всё более устойчивое суждение о практической неисчерпаемости источника редкостных свойств числа 12.

Благодаря этому появляется явственная и отчетливая уверенность в том, что "ореол двенадцати" обнаруживает черты главного остова в структурировании мироустройства. По крайней мере, в его обозримо видимой или наблюдаемой части.

Можно возразить, например, очевидной фундаментальностью единицы, что вполне допустимо. Хотя и не всё так бесспорно.

Например, нематематическая единица – это что? – То, что видим или то, что есть?

Является ли единицей звезда, которой уже давным-давно нет, но её свет всё ещё виден нам через телескоп?

Или дерево-единица. Оно какое? – С листьями либо без оных. Или с отломанной веткой.

А если молния расщепила ствол пополам. – Этот объект всё ещё продолжает оставаться единицей, либо уже нет? – Не всё так очевидно или легко умещается в заданные рамки.

Для этого, как минимум, нужны общие договорённости.

Напомним также, что кроме абстрактно-математических представлений, додекада (12) – ярко выраженный знак нумерологии и сакральное число многих древних народов [1].

Неслучайно наиболее ранние счётные системы были именно 12-ричными.

Так, своё отражение-воплощение нашла реализация общей идеи, будто рассматриваемое единое (глобально целое) манифестируется 12 внешними проявлениями.

Действительно, произведение $3 \times 4 = 12$.

Число 3 выражает временной параметр мира "прошлое–настоящее–будущее", а 4 – пространственный "север–юг–восток–запад".

Произведение этих цифр связано с их суммой – гептадой.

Если 7 есть воображаемый мир в человеческом измерении, то 12 – проецируется в божественных координатах.

Или как в музыке 12 квинт создают 7 октав.

Цифровое разложение 12 на 1 и 2 в сумме даёт три – символ триад языческих богов и христианской троицы.

Все эти разносортные, а порой и слабо увязанные ракурсы в своём многообразии всё же свидетельствует о значимости выбранной темы.

И с новым зарядом энергии мы продолжаем наши исследования дальше, но уже максимально в математических координатах-проекциях.

Итак, число 12... (продолжение)

- В теории чисел 12 – практическое число (panarithmic[1]) – натуральное n такое, что все меньшие числа представляются в виде суммы надлежащих делителей n (A005153).

Все числа $1 \div 11$ выражаются как сумма делителей 1, 2, 3, 4 и 6, то есть кроме непосредственно самих этих делителей имеем: $5=3+2$, $7=6+1$, $8=6+2$, $9=6+3$, $10=6+3+1$, $11=6+3+2$.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Practical_number.

• Суммарное число эксидентов (*excedance*) во всех нечетных перестановках множества {1, 2, 3, 4} без неподвижных точек (A145886), когда двигаются все элементы.

Говорят, что перестановка p имеет эксидент в позиции i, если $p(i) > i$ – содержимое i-й позиции больше порядкового номера самой позиции, $1 \le i \le n$.

Так, для 2341: $2>1$, $3>2$, $4>3$, $1<4$; для 3142: $3>1$, $1<2$, $4>3$, $2<4$.

Возможные перестановки 4123, 3142, 4312, 2413, 2341, 3421 соответственно имеют 1, 2, 2, 2, 3, 2 эксидентов, а всего – **12**.

x	0	0	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
y	1	3	1	2	1	0	0	0	0	1	2	3	
z	3	1	2	1	1	0	1	2	3	0	0	0	

• Количество способов представления числа $n = 3$ как $x + yz$, где $0 \le x, y, z \le n$ (A106633).

• Количество взаимно простых подмножеств целых чисел (1 2 3 4):

( ), (1), (2), (3), (4), (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (3 4), (1 2 3), (1,3 4).

Одновременно общее количество элементов в аналогичных подмножествах (1 2 3): ( ), (1), (2), (3), (1 2), (1 3), (2 3), (1 2 3) с учетом пустого подмножества ( ) (A087080[2]).

• Минимальное значение формы $p_1^2 + p_2^3 = 2^2 + 2^3 = 12$ двух простых чисел p_1, p_2 (A045699).

• Количество разложений $2n$ в упорядоченные суммы двух нечетных простых чисел – гипотеза Гольдбаха (A002372):

$$2\cdot 33 = 66 = 5+61 = 7+59 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+37;$$

$$2\cdot 36 = 72 = 5+67 = 11+61 = 13+59 = 19+53 = 29+43 = 31+41;$$

$$2\cdot 55 = 110 = 3+107 = 7+103 = 13+97 = 31+79 = 37+73 = 43+67.$$

Данные соотношения дополняются 6 разложениями с переменой местами слагаемых.

Согласно бинарной проблеме Гольдбаха[3], которая до сих пор является одной из старейших нерешённых проблем:

любое чётное число ≥ 4 можно представить в виде суммы двух простых чисел.

• Подмножества первых пяти простых чисел, сумма которых – простое (A071810):

{2}, {3}, {5}, {7}, {11}, {2 3}, {2 5}, {2 11}, {3 5 11}, {5 7 11}, {2 3 5 7}, {2 3 7 11}.

• Способы представления уменьшенного на 1 простого числа $p_n - 1$ в виде суммы двух простых чисел $p_i + p_j$ (A103273) для $p_{3\cdot 12} - 1 = 150$, $p_{50} - 1 = 228$, $p_{2^6} - 1 = 310$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
150	11 139	13 137	19 131	23 127	37 113	41 109	43 107	47 103	53 97	61 89	67 83	71 79
228	5 223	17 211	29 199	31 197	37 191	47 181	61 167	71 157	79 149	89 139	97 131	101 127
310	3 307	17 293	29 281	41 269	47 263	53 257	59 251	71 239	83 227	113 197	131 179	137 173

[2] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.

[3] http://ru.wikipedia.org/?oldid=32676638; http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html.

- Наименьшее среднее арифметическое 9 различных простых чисел (A103622):

$$(2+3+5+7+11+13+17+19+31)/9 = \mathbf{12}.$$

- Произведение первых **12** праймориалов плюс единица – простое число (A066267)

$$\prod_{m=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} p_k + 1 = \prod_{m=1}^{n} m\# = \underbrace{(2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3\cdot 5)\cdots\underbrace{(2\cdot 3\cdot 5\cdots 37)}_{12}}_{12} = $$

$$= 2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{10}\cdot 7^{9}\cdot 11^{8}\cdot 13^{7}\cdot 17^{6}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot 29^{3}\cdot 31^{2}\cdot 37^{1}+1=$$

= 5578444072096851381336800253386145497954817677716157440855600000000001 – простое

Праймориал (*primorial*[4]) $m\#$ – аналог факториала для простых чисел, определяемый как произведение простых чисел, не превышающих m.

- Размер (количество векторов) базиса Гильберта[5] для 5-мерного векторного пространства (A141347).

- Для $n = \mathbf{12}$ эллиптическое диофантово уравнение Моделля $y^2 = x^3 + n$ имеет решения с двумя различными значениями x (A134221): $(x, y) = (-2, \pm 2), (13, \pm 47)$.

- Количество способов представления двойки в виде суммы трёх квадратов (A066536) или все целочисленные решения уравнения: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Учитывая равнозначность и взаимозаменяемость переменных *x*, *y*, *z*, имеем 3 перестановки из (1, 1, 0), 3 – из (–1, –1, 0) и 6 – из (1, –1, 0), всего **12**.

- Наименьшее число a_n = **12** последовательности (A064765) 1, 2, 5, 6, **12**, 17... такое, что для любого $m < n$ все величины $a_m + a_n$ и $a_m \cdot a_n$ – не квадраты.

- Число пар натуральных чисел $x \le y$ таких, что $x^2 - ny$, $y^2 - nx$ – квадраты (A176836)

n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	*X*	9	12	15	15	21	24	25	31	41	97	125	297
	Y	9	12	16	24	33	55	25	48	185	437	189	1337
18	*X*	9	18	24	30	30	42	48	50	62	82	194	250
	Y	9	18	24	32	48	66	110	50	96	370	874	378

- Трансформация биномиальных коэффициентов (A142974):

$$(1, 5, 10, 10, 5, 1) \times (1, 1, -1, 1, 1, 1) = (1 + 5 - 10 + 10 + 5 + 1) = \mathbf{12}.$$

Если отчет начать с нуля, то в общем случае $a_n = 2^n - n(n-1)$, и $a_5 = 2^5 - 5\cdot 4 = \mathbf{12}$.

- Число **12** делит конкатенацию (стринг) следующих **12** чисел (A069861):

$$12\,13\,14\,15\,16\,17\,18\,19\,20\,21\,22\,23\,24 / 12 = 1095126347651600176852 7.$$

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Primorial.

[5] http://mathworld.wolfram.com/HilbertBasis.html. – *Здесь и далее подобные ссылки приведены с целью получения отправной точки, в том числе и по литературным источникам, для последующего более широкого ознакомления и углубленного изучения.*

- Конкатенация реверса **12** и самого числа **12** делится на **12** (A08397): 2112/12 = 176.

- Перечисление не поддающихся превращению многочленов и пар взаимно простых многочленов нескольких переменных над ограниченными полями [2, с. 29], – по явной формуле $I_2(1) = q(q+1) = 3 \cdot 4 = \mathbf{12}$ при $q = 3$.

+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
+	+	−	+	−	−	−	+	+	+	−	+
+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+	−
+	−	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+
+	+	−	+	+	−	+	−	−	−	+	+
+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	−	+
+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	−
+	−	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−
+	−	−	+	+	+	−	+	+	−	+	−
+	−	−	−	+	+	+	−	+	+	−	+
+	+	−	−	−	+	+	+	−	+	+	−
+	−	+	−	−	−	+	+	+	−	+	+

- Для $n = \mathbf{12}$ существует квадратная матрица Адамара H размером $n{\times}n$, которая составлена из чисел (1, –1) и имеет ортогональные столбцы, так что справедливо соотношение $H^{\mathrm{T}} \cdot H = n \cdot I$, где I – единичная матрица порядка n.

Недоказанная гипотеза утверждает, что матрица Адамара порядка $4k$ существует для каждого натурального k.

Матрицы Адамара применяются в комбинаторике, численном анализе, обработке сигналов и др.

- След квадратной матрицы Вандермонда над числами натурального ряда (A060946).

В общем случае квадратная $n{\times}n$ матрица Вандермонда над элементами произвольного поля $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет вид $V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

След матрицы – сумма элементов её главной диагонали: $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 2 + 9 = \mathbf{12}$.

- Количество 3×3-матриц с элементами из {0÷3}, которые обладают следующим свойством:

средний элемент каждой из восьми 3-элеменных горизонтальных, вертикальных и диагональных линий равен арифметическому среднему из двух крайних элементов (A059329).

0 0 0	1 1 1	2 2 2	3 3 3	0 1 2	0 0 0	2 1 0	2 2 2	1 2 3	1 1 1	3 2 1	3 3 3
0 0 0	1 1 1	2 2 2	3 3 3	0 1 2	1 1 1	2 1 0	1 1 1	1 2 3	2 2 2	3 2 1	2 2 2
0 0 0	1 1 1	2 2 2	3 3 3	0 1 2	2 2 2	2 1 0	0 0 0	1 2 3	3 3 3	3 2 1	1 1 1

- Количество симметричных неизоморфных матриц 3×3, в которых суммы элементов по столбцам и строкам равны 6 (A008764):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
006	015	015	024	024	114	123	123	123	123	222	303
060	141	150	240	231	141	222	231	213	240	222	033
600	510	501	402	411	411	321	312	330	303	222	330

Неизоморфные свойства означают эквивалентность матриц, образуемых из приведенных путём перестановок между собой строк или столбцов.

- Имеется n коробок 1...n, каждая из которых i весит $k{\cdot}i$ грамма и способна поддерживать общий вес i грамм (A090631, A090632). Можно составить ровно **12** стеков (вариантов штабелей) так, что никакая коробка не будет раздавлена, при (n, k) = (6, 3) и (5, 2).

- Относится к обобщенным пятиугольным числам $n(3n-1)/2$, $n=0$, ±1, ±2... (A001318) и, значит, можно образовать ровно **12** матриц 3×3, симметричных относительно обеих диагоналей $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ таких, что $a+b+c=2b+d=7$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
331	133	115	511	322	223	214	412	124	421	232	313
313	313	151	151	232	232	151	151	232	232	313	151
133	331	511	115	223	322	412	214	421	124	232	313

- Число базисов для симметрических функций 5 переменных (A007323) или количество n_g числовых полугрупп "рода" g [3, с. 24].

В общем случае числовые полугруппы образуют последовательность (A007323): 1, 2, 4, 7, **12**, 23, 39, 67, 118...

Рекурсивная конструкция числовых полугрупп рода g от числовых полугрупп рода g–1 имеет вид:

(1)

(2 3)

(3 4 5) (2 5)

(4 5 6 7) (3 5 7) (3 4) (2 7)

(5 6 7 8 9) (4 6 7 9) (4 5 7) (4 5 6) (3 7 8) (3 5) (2 9)

(6 7 8 9 10 11) (5 7 8 9 11) (5 6 8 9) (5 6 7 9) (5 6 7 8) (4 6 7) (4 7 9 10) (4 6 9 11) (4 5 11) (3 8 10) (3 7 11) (2 11)

В работе [4] высказано предположение, что последовательность n_g асимптотически стремится к золотому сечению, подобно числам Фибоначчи.

В математике полугруппой называют множество с одной бинарной ($G\times G\to G$) ассоциативной $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ операцией, обычно именуемой умножением. Полугруппу с нейтральным элементом (единицей), как правило, называют моноидом.

- Число асимметричных полугрупп порядка 3 (A058107). Полугруппы считаются эквивалентными, если они изоморфны или неизоморфны относительно обратного оператора.

- Количество коммутативных ($a\cdot b=b\cdot a$) полугрупп 3 порядка (A001426).

- Количество ассиметричных идемпотентных полугрупп 4 порядка (A058115).

- Число единиц в пятом стринге, когда начиная со строки 01, каждый последующий составляется из двух предыдущих копий с отбрасыванием последнего символ (A164363):

$$01\Rightarrow\underline{01}0\Rightarrow\underline{010}01\Rightarrow\underline{01001}0100\Rightarrow\underline{010010100}01001010\Rightarrow\underline{\mathbf{0}1\mathbf{00}1\mathbf{0}1\mathbf{000}1\mathbf{00}1\mathbf{0}1\mathbf{0}}\mathbf{0}1\mathbf{00}1\mathbf{0}1\mathbf{000}1\mathbf{00}1\mathbf{0}1.$$

- Количество чётных записей во всех 2-композициях n (A181298).

2-композиция n – неотрицательная матрица с двумя строками, такими, что элементы каждого столбика дают в сумме n, и среди них есть, по крайней мере, один ненулевой элемент. Так, в 2-композициях для $n=2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ имеем $0+2+2+2+2+2+2=\mathbf{12}$ чётных (A181298) и $2+0+0+2+2+2+2=10$ нечётных записей (A181296).

- Количество 2-циклов во всех инволюциях из {1, 2, 3, 4} – преобразованиях, которые являются обратными самому себе: симметрии, инверсии, сопряжения и т.п. (A162970).

Каждая инволюция – есть произведение непересекающихся транспозиций – перестановок (в комбинаторике), которые меняют местами только два элемента.

Число инволюций[6] в группе перестановок порядка n можно определить рекуррентно:

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, \quad (a_0, a_1) = (0, 1).$$

В случае $n = 4$ возможные десять инволюций (A000085) дают **12** пар (2-циклов):

$$(1)(2)(3)(4),\ (\underline{12})(\underline{34}),\ (\underline{13})(\underline{24}),\ (\underline{14})(\underline{23}),\ (\underline{12})(3)(4),\ (1)(2)(\underline{34}),$$
$$(\underline{13})(2)(4),\ (1)(3)(\underline{24}),\ (\underline{14})(2)(3),\ (1)(4)(\underline{23}).$$

- Количество инверсий во всех инволюциях из $\{1, 2,..., 2n\}$, свободных от фиксированной точки (A161124).

Перестановка τ' является инволюцией τ, если $\tau \circ \tau' \Rightarrow \tau$. Например,

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ \mathbf{3\,4\,1\,2} \end{pmatrix} = (1, 3)(2, 4)$ – инволюция; $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ \mathbf{4\,3\,1\,2} \end{pmatrix} = (1, 4)(2, 3)(1, 3)(2, 4)$ – не инволюция.

При $n = 2$, кроме очевидной нулевой перестановки 1234, имеем три инволюции с соответствующими инверсиями 2, 4 и 6 (всего **12**):

$$2143 \ - \ \underset{\mathbf{1}}{\leftarrow} 1,\ \ \underset{\mathbf{1}}{\leftarrow} 3; \quad 3412 \ - \ \underset{\mathbf{2}}{\leftarrow} 1,\ \ \underset{\mathbf{2}}{\leftarrow} 2; \quad 4321 \ - \ \underset{\mathbf{3}}{\leftarrow} 1,\ \ \underset{\mathbf{2}}{\leftarrow} 2,\ \ \underset{\mathbf{1}}{\leftarrow} 3.$$

- Количество нормальных (–1, 1)-матриц размером 2×2 (A055548).

Квадратная матрица нормальная, если $\left[A, A^{\mathrm{T}}\right] = AA^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}A = 0$, где т – символ транспонирования. Матрицы: все 1 или (–1) – 2 шт.; одна 1 или (–1) – 4+4 = 8 шт.; два минуса на диагоналях – 2 шт. Всего – **12** матриц.

- Количество 3×n бинарных (0–1)-матриц, которые содержат n+2 единицы и не имеют нулевых строк или столбцов, n = 2 (A084485).

- Количество 4×4 бинарных массивов, где строки и столбцы рассматриваются как двоичные числа в неубывающем порядке, – с чётным (A162053) или нечётным (A162055) числом единиц в каждой строке или столбце.

- Количество бинарных массивов 4×4, где каждая единица является смежной точно с одной единицей по вертикали и одной единицей по горизонтали (A183336).

Данное требование эквивалентно тому, что все единицы связаны только в блоки 2×2.

1100 1100 0000 0000	0110 0110 0000 0000	0011 0011 0000 0000	0000 1100 1100 0000	0000 0110 0110 0000	0000 0011 0011 0000	0000 0000 1100 1100	0000 0000 0110 0110	0000 0000 0011 0011	1100 1100 0011 0011	0011 0011 1100 1100	0000 0110 0110 0000

- Бинарные массивы 3×3 без шаблона 01 по вертикали (сверху–вниз), горизонтали (слева–направо) и двум диагоналям (A188554):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
111	111	111	111	111	111	111	110	100	000	100	100
111	111	111	111	110	100	000	000	000	000	100	100
111	110	100	000	000	000	000	000	000	000	000	100

[6] Инволюция (математика) // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=31203106.

- Количество исключительных множеств корней типа D_3 (n = 3) в кластер алгебре[7] – классе коммутативных колец – алгебраических структур с двумя бинарными операциями: сложением и умножением.

Также количество неупорядоченных факторизаций элемента Кокстера[8] (A137207).

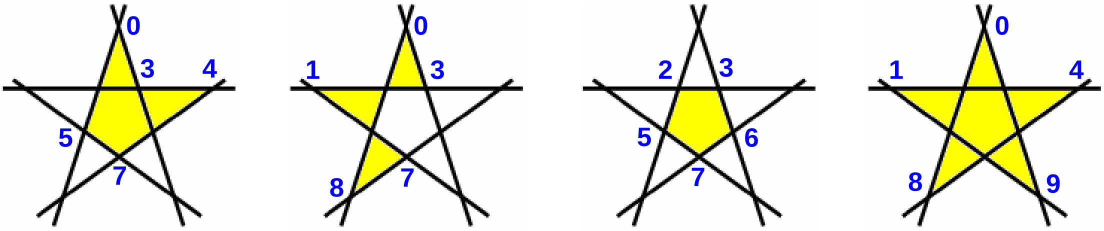
- Количество фреймов (структур, рамок), образуемых $n = 5$ линиями, когда в общем случае нет параллельных прямых, и никакие три линии не пересекаются в одной точке.

Также число неориентированных 2-регулярных помеченных графов; или число $n \times n$ симметричных (0, 1)-матрицы с нулевым следом и всеми строчными суммами 2 (A001205).

Фрейм – подмножество n точек пересечения из их общего числа $C(n,2) = n(n-1)/2$, если три точки не находятся на одной и той же линии.

В случае 5 линий образуется общая фигура, изоморфная пятилучевой звезде, на которой можно выделить в точности **12** фреймов:

– с двумя смежными лучами, типа 05743 – 5 шт.;
– с тремя смежными лучами, типа 08713 – 5 шт.,
– 25763 и 08419.



- Содержится в "дважды степенной зависимости" [5], когда четные члены образуются перемножением двух предшествующих элементов, а нечетные – их сложением:

$$(f_0, f_1) = (0, 1), \qquad f_n = \begin{cases} f_{n-1} f_{n-2}, & n \pmod 2 = 0, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \pmod 2 = 1. \end{cases}$$

Получается своеобразная аддитивно-мультипликативная разновидность модели Фибоначчи, формирующая ряд (A039941): 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 8, **12**, 96, 108...

- Количество K_n неэквивалентных перестановок из {0 .. 2n–1} таких, что их первые разности (по модулю 2n) составляют перестановку из {1 .. 2n–1} (A067601).

По отношению к допустимой перестановке D эквивалентными следует считать её цифровой реверс (зеркальное отражение) D_R, а также циклические перестановки D и D_R.

При n = 3 получаем точно K_3 = **12** неэквивалентных перестановок:

0 1 5 2 4 3	**0 2 1 4 5 3**	**0 4 5 2 1 3**	**0 5 1 4 2 3**
1 4 3 2 5	2 5 3 1 4	4 1 3 5 2	5 2 3 4 1
1 0 2 5 3 4	**1 2 0 3 5 4**	**1 3 2 5 0 4**	**1 5 0 3 2 4**
5 2 3 4 1	1 4 3 2 5	2 5 3 1 4	4 1 3 5 2
2 0 1 4 3 5	**2 1 3 0 4 5**	**2 3 1 4 0 5**	**2 4 3 0 1 5**
4 1 3 5 2	5 2 3 4 1	1 4 3 2 5	2 5 3 1 4

Примечательно, что K_5 = **144 = 12²**.

---

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Cluster_algebra#CITEREFFominZelevinsky2002.
[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_element#Coxeter_elements.

• Количество n×2 массивов чисел m = 1÷3, содержащих хотя бы одно из значений m, все значения построчно (по вертикали сверху вниз) не убывают, а строки (рассматриваемые как единое число) расположены в неубывающем порядке (n = 2, A166776):

11	11	12	12	12	12	13	21	21	21	21	31
23	32	13	23	32	33	23	31	23	32	33	32

В общем случае равно $\left(n^4+8n^3+8n^2-23n+6\right)/6$.

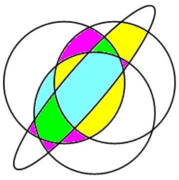
• Первая позиция в десятичном представлении, где числа π, e, Φ – одинаковы (равны 9). Далее следуют позиции 99, 169... (A090230).

• Число эквивалентных классов булевых функций 2 переменных с учетом симметричности группы – множества с определённой на нём бинарной операцией (A003180).

Также число неизоморфных множеств подмножеств 2-множеств.

• Число биекций (подперестановок) в множестве из n = 3 элементов точно с одной неподвижной точкой, выделенной цветом (A144086):

(1)→(1), (2)→(2), (3)→(3), (1,2)→(1,3), (1,2)→(3,2), (1,3)→(1,2), (1,3)→(2,3), (2,3)→(2,1), (2,3)→(1,3), (1,2,3)→(1,3,2), (1,2,3)→(3,2,1), (1,2,3)→(2,1,3)



• Количество "самодуальных" (двойственных) булевых монотонных функций (приращение не меняет знака) 4 переменных (A001206).

Также максимальное число "семей" при пересечении подмножеств из 4 элементов.

Возможны и другие интерпретации.

• Количество подмножеств отрезка [–2...+2] с положительными суммами (A181765):

(–2,0,1,2), (–2,1,2), (–1,0,1,2), (–1,0,2), (–1,1,2), (–1,2), (0,1), (0,1,2), (0,2), (1), (1,2), (2).

• Количество делителей репдигитов $10^n - 1 = 9_n$ (A070528) при n = 4, 5, 7, 11, 17.

Например, число 9_7 = 9999999 имеет **12** делителей: 1, 3, 9, 239, 717, 2151, 4649, 13947, 41841, 1111111, 333333, 9999999.

n	1	2	3	4	5	6
Кубы	1	8	27	64	125	216
1-я сумма	1	9	36	100	225	441
2-я сумма	1	10	46	146	371	812
3-я сумма	1	11	57	203	574	1386
4-я сумма	1	**12**	69	272	846	2232

• Четвертая парциальная сумма кубов (A101097).

$$a(n)=n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)\frac{2+n(4+n)}{12\cdot 70};$$

$$a(n)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=k'-k+1}^{k'}(2m-1),\ k'=k\frac{k+1}{2}.$$

• Разделение последовательности натуральных чисел на группы так, что в каждой группе произведение чисел ≥ n!, пока группа не будет содержать только одно число $x \geq n$!

Количество таких групп образуют последовательность (A092980).

Для n = 4 имеем 4! = 4·3·2 = 24 и соответствующее распределение чисел на **12** групп:

(1,2,3,4), (5,6), (7,8), (9,10), (11,12), (13,14), (15,16), (17,18), (19,20), (21,22), (23,24), (25).

• Подмножество первых **12** натуральных чисел допускает оригинальное разбиение на триплеты (x, y, z), каждый из которых удовлетворяет равенству $x+y=z$, с максимально возможным числом таких триплетов (A002849):

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 1&5&6\\2&8&10\\3&9&12\\4&7&11\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&5&6\\2&9&11\\3&7&10\\4&8&12\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&6&7\\2&10&12\\3&8&11\\4&5&9\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&10&11\\2&5&7\\3&6&9\\4&8&12\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&11&12\\2&6&8\\3&7&10\\4&5&9\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&11&12\\2&7&9\\3&5&8\\4&6&10\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&8&9\\2&10&12\\3&4&7\\5&6&11\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|ccc|}\hline 1&9&10\\2&4&6\\3&8&11\\5&7&12\\\hline\end{array}$$

В каждой из матриц нет одинаковых из **12** элементов, и правый столбец равен сумме двух предыдущих.

• Число единиц в двоичном представлении чисел от 1 до $n=3$ бит: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111.

Также количество нулевых пар 00 в двоичном представлении чисел от 0 до $n+1=4$ бит: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100.

$$\begin{array}{cccc} 0&1&2&3\\ &1&3&5\\ &&4&8\\ &&&\mathbf{12}\end{array}$$

Также общее число нулей в двоичном представлении чисел $n+1=4$ бит: 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Также число рёбер в 3-мерном гиперкубе.

Также заключительный элемент суммирования в треугольной таблице, первая строка которой состоит из целых положительных чисел от 0 до $n=3$.

В общем случае равно $2^{n-1}n$.

Имеет множество других интерпретаций и форм выражения (A001787).

• Число **12** можно ровно **12** раз представить в виде суммы S, где S – упорядоченные произведения $(1+S)$, отсортированные по размеру, причём пустое произведение имеет значение 1 (A130841):

1	(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)	1_{12}
2	(1+1+1+1+1+1+1+1+(1+1)·(1+1))	$1_8+1_2\cdot1_2$
3	(1+1+1+1+1+1+(1+1)·(1+1+1))	$1_6+1_2\cdot1_3$
4	(1+1+1+1+(1+1)·(1+1+1+1))	$1_4+1_2\cdot1_4$
5	(1+1+ (1+1)·(1+1+1+1+1))	$1_2+1_2\cdot1_5$
6	((1+1)·(1+1+1+1+1+1))	$1_2\cdot1_6$
7	(1+1+1+(1+1+1)·(1+1+1))	$1_3+1_3\cdot1_3$
8	(1+1+1)·(1+1+1+1)	$1_3\cdot1_4$
9	(1+1+1+1+(1+1)·(1+1)·(1+1))	$1_4+1_2\cdot1_2\cdot1_2$
10	(1+1)·(1+1)·(1+1+1)	$1_2\cdot1_2\cdot1_3$
11	(1+1+(1+1)·(1+(1+1)·(1+1)))	$1_2+1_2\cdot(1+1_2\cdot1_2)$
12	(1+1)·((1+1+(1+1)·(1+1)))	$1_2\cdot(1_2+1_2\cdot1_2)$

• Упорядоченные подмножества {1÷5}, не свободные от дублей (not double-free):

12, 123, 124, 125, 1234, 1235, 1245, 12345, 24, 234, 245, 2345.

Подобные подмножества образуют ряд f_n (A088808): 0, 1, 2, 6, 12, 34, 68...

Ему альтернативен ряд f'_n (A050291): 2, 3, 6, 10, 20, 30, 60... – количество свободных от дублей подмножеств (double-free) для {1÷n} с учетом пустого подмножества.

Набор свободен от дублей, если не содержит в себе пары $(x, 2x)$: $(1, 2)$, $(3, 6)$ и т.д.

Примечательно, что второй ряд образует связку с первым $f_n + f'_n = 2^n$ и описывается с помощью чисел Фибоначчи F:

$$f'_n = f'_{n-1}\frac{F_{b_n+3}}{F_{b_n+2}}, \quad f'_1 = 2,$$

где b_n – последовательность "бинарного переноса" (binary carry sequence[9], A007814) – количество нулей в конце числа n при его двоичном представлении.

- Число непустых подмножеств $\{1 \div 7\}$ в которых точно 2/3 элементов ≤ 3 (A047173):

{127}, {126}, {125}, {124}, {137}, {136}, {135}, {134}, {237}, {236}, {235}, {234}.

- Количество рациональных чисел $\in [0, 1)$, имеющих не более n битов предпериода и не более n битов периода (A119921).

Предпериод дроби – группа цифр после запятой до первого знака периода.

Период дроби – повторяющаяся группа цифр.

Части предпериода и периода выбираются как можно короче.

0/1 = 0.(0)..., 1/3 = 0.(01)..., 2/3 = 0.(10)..., 1/2 = 0.1(0)..., 1/6 = 0.0(01)...,
5/6 = 0.1(10)..., 1/4 = 0.01(0)..., 3/4 = 0.11(0)..., 1/12 = 0.00(01)..., 5/12 = 0.01(10)...,
7/12 = 0.10(01)..., 11/12 = 0.11(10)... $\Rightarrow$ **12**.

- Является исходным членом удивительнейшей периодической последовательности, образуемой по следующей рекуррентной схеме (A083825):

$$a_1 = n, \qquad a_2 = \frac{R(9a_1)}{9}, \qquad a_k = \frac{R(9R(a_{k-1}))}{9},$$

где $R(\xi) = R(\alpha_m \ldots \alpha_0) = \alpha_0 \ldots \alpha_m$ – реверсивная функция (реверс-число), перезаписывающая натуральное число ξ в обратном порядке его цифр, α_t – цифры исходного числа ξ.

Синтезированный ряд (с периодом $T = 15$) имеет вид:

12, 89, 32, 78, 43, 67, 54, 56, 65, 45, 76, 34, 87, 23, 98, 12.

Пример пошагового преобразования: $32 \to 23 \cdot 9 \to 207 \to 702/9 = 78$.

Есть и другие подобные числа с такими свойствами:

a_1		T
12		15
313	426	26
1255		51
34743	45854	70
125522		87
3147413	4258524	122
12552134		123
411575114	(всего 20)	142
22314741322	(всего 212)	146

[9] http://mathworld.wolfram.com/BinaryCarrySequence.html. – *Здесь и далее подобные ссылки приведены с целью получения отправной точки, в том числе и по литературным источникам, для последующего более широкого ознакомления и углубленного изучения.*

Для 2, 4, 6, 8-значных чисел – существует только по одному кандидату; для 3, 5, 7-значных чисел – по два кандидата, причём в виде палиндромов.

Далее количество подобных чисел экспоненциально возрастает.

Но что поразительно, вначале периоды возрастают с удивительно одинаковым приращением 36, кратным **12**: $15 \to 51 \to 87 \to 123$.

- Весьма любопытно проявление свойств числа 12 при формировании оптимальных последовательностей (A096220).

Конечный ряд, состоящий из единиц и простых чисел, является полным, если любое целое $1 \le n \le L$ можно получить в виде суммы некоторого набора последовательных чисел данного ряда [6].

Такой ряд идентифицируется тройкой чисел $\{k, L, d\}$, где k – номер максимального простого числа, L – сумма ряда, d – количество элементов ряда.

Правило формирования ряда минимальной длины: повторяться могут только единицы, но не простые числа, и длина ряда d меньше или равна простому числу p_k:

{1, 3, 2}: 1 2.

{2, 6, 3}: 1 3 2.

{3, **12**, 5}: 1 3 1 5 2.

{4, 20, 7}: 1 1 2 7 3 5 1, 1 1 5 2 7 3 1, 1 1 7 5 2 3 1.

{5, 33, 10}: 1 1 2 1 11 7 1 5 1 3, ...

Таким образом, ряд (1 3 1 5 2) является минимальным и полным, определяя все натуральные числа от 1 до **12**. То есть **12** – является числом, для которого существует полный ряд оптимальной длины.

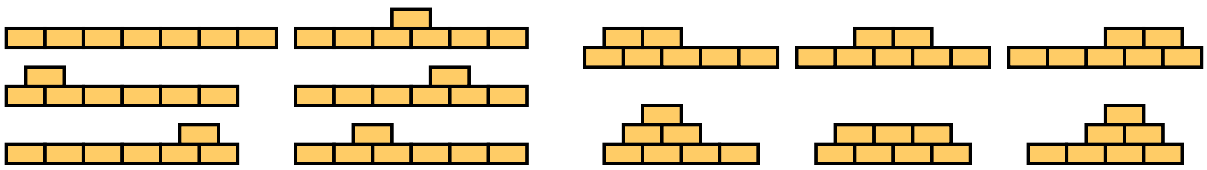
- Существует уникальный ограниченный ряд чисел, которые не могут быть представлены в виде суммы полупростого и квадрата (включая 0 и 1) A100570: 1, 2, 3, **12**, 17, 28, 32, 72, 108, 117, 297, 657. Примечательно, что 12 – элемент данного ряда. Но еще более удивительно, что вероятнее всего таких чисел вообще существует только **12**(!)

Во всяком случае, больше пока не найдено.

- Подмножества из набора (1...5), содержащие ровно два простых числа (A089822):

23, 25, 35, 123, 125, 135, 234, 245, 345, 1234, 1245, 1345.

- Количество стеков (аранжировок) 7 одинаковых прямоугольников (кирпичей) в смежные ряды, если верхний предмет может касаться только двух нижних (A001524)



- Устанавливает связь с числами золотой пропорции (ϕ, Φ) и π:

число π в градусах равно $180° = 3 \cdot 60° = 15 \cdot \mathbf{12}°$;

$$\phi/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(2\pi/5) = \cos\left(6 \cdot \mathbf{12}^{o}\right);$$

$$\Phi/2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos(2\pi/10) = \cos(3\cdot\mathbf{12}^{\circ});$$

$$W = \Phi^2/2 = 1+\phi/2 \approx 1{,}309 \text{ – золотой вурф.}$$

Золотой вурф (термин проективной геометрии) обозначает четверку точек прямой и не изменяется при конформном преобразовании [7].

Золотой вурф, выраженный в градусах, равен $75°$ или $5\pi/\mathbf{12}$.

Синус угла $\sin 30° = \sin(360°/\mathbf{12}) = 0{,}5$ составляет ровно половину радиуса окружности.

Только $\sin 30°$ является целым рациональным числом.

Это означает, что среди углов, на которые может быть поделен круг, лишь угол в 30° объединяет рациональное деление круга на **12** с рациональным делением радиуса круга на 2.

Данное свойство числа **12** – уникальный мостик между линейными (радиусом) и радиальными (углом) величинами окружности.

Поскольку результат деления окружности на **12** – это единственное целое и рациональное число, то само деление в этом случае является гармоничным.

- Число золотого сечения в целочисленном процентном отношении равно 62 = 50 + 12 %. То есть, 12 частей из 100 отнимается от одной части, первоначально равной 50 %, и прибавляется к другой.

- **12** – уменьшенное на единицу седьмое (n = 7) число Фибоначчи 12 = F_7 – 1.

В связи с этим возникают интересные, если не сказать удивительные, закономерности (A000071), которые сопровождают числа Фибоначчи:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	1	1
3	3	4	4	2	2	2	3	3	3	4	4
4	5	3	3	4	4	5	4	4	5	3	3
6	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6
5	6	6	5	6	5	6	6	5	6	6	5

1) Количество перестановок $p\{1 \div n{-}1\}$ таких, что $\max|p_i - i| = 1$, равно **12**.

Это означает, что каждое из чисел может занять только соседние позиции либо остаться на месте, за исключением случая, когда все числа одновременно занимают свои места.

2) Сумма первых n–2 чисел Фибоначчи: 1+1+2+3+5 = **12**.

3) Число разбиений $\{1 \div n{-}1\}$ на два блока, в которых могут появляться только пары последовательных чисел, но не более (13/2$\underline{456}$, 156/$\underline{234}$ не подходят), и где есть, по крайней мере, одна такая пара (то есть разбиение типа 135/246 не подходит).

Для шести чисел $\{1 \div 6\}$ имеем точно **12** таких разбиений:

14/2356, 124/356, 125/346, 134/256, 136/245, 145/236,

146/235, 1245/36, 1246/35, 1256/34, 1346/25, 1356/24.

4) Последовательность образуется по рекуррентной формуле:

$$(a_0, a_1) = (0, 0),\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1:\ \ 0, 0, 1, 2, 4, 7, \mathbf{12}, 20...$$

5) Аналитическое представление через биномиальные коэффициенты (a_7 = **12**):

$$a_{n+3} = \sum_{k=0}^{\lceil n/3 \rceil} C_{n-2k}^{k} (-1)^k 2^{n-3k}; \qquad a_n = \sum_{k=0}^{\lceil (n-3)/2 \rceil} C_{n-2-k}^{k+1}.$$

6) Выражается через константу золотого сечения $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$

$$a_{n+2} = -1 + \frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\Phi^{n} + \left(5-3\sqrt{5}\right)\Phi^{-n}}{10}.$$

7) Число a_{n+1} является элементом $A_{3,2}$ матрицы $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$.

Так, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{6} = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 20 & \mathbf{12} & 1 \end{pmatrix}$.

- Член гармонически-среднего аналога последовательности Фибоначчи:

$$a_n \cong 2\frac{2a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}}, \quad (a_1, a_2) = (1, 1):$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ \mathbf{12},\ 19,\ 29,\ 45,\ 70\ \ldots$$

Каждый элемент (терм) последовательности Фибоначчи равнозначен удвоенному арифметическому среднему двух предшествующих термов.

Терм данной последовательности (A093335) – это удвоенное гармоническое среднее двух предшествующих термов, округленное до ближайшего целого числа.

- Член геометрически-среднего аналога последовательности Фибоначчи:

$$a_n \cong 2\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}, \quad (a_1, a_2) = (1, 1):$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ \mathbf{12},\ 19,\ 30,\ 47,\ 75\ \ldots$$

Терм данной последовательности (A093335) – это удвоенное геометрическое среднее двух предшествующих термов, округленное до ближайшего целого числа.

- Дж.Н.Манси доказал (1913), что наименьший магический квадрат (МК) из последовательных нечетных простых чисел должен иметь порядок **12** с магической константой 4514, и заполнил такой квадрат 144-мя первыми нечетными простыми числами (с учетом 1, но исключая единственное четное простое число 2) [8]

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Заметим, что число 2 нельзя вписать ни в один МК, составленный из разных простых чисел. Дело в том, что сумма чисел в строке или столбце, на пересечении которых находится число 2, отличалась бы по четности от суммы чисел в остальных строках и столбцах [9], и квадрат не был бы магическим.

Данный квадрат поражает нас своей числовой магией в виде ещё одного исключительного свойства: максимальное число расположено в углу магического квадрата, равно $827 = 100{\cdot}2^3 + 3^3$ и является конкатенацией (объединением) двух кубов 2^3 и 3^3.

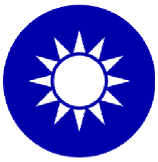
- Простой магический квадрат 3×3 с числами от 1 до 9 имеет магическую сумму (по строкам, столбцам или диагоналям) 15.

В то же время существует ровно **12** классов симметрии полумагических квадратов 3×3 (равенство сумм по строкам и столбцам) с различными положительными значениями и магической суммой $n = 19$ (A173725). Симметрия подразумевает перестановку строк и столбцов, а также отражения по диагоналям.

Между прочим...

Свойства числа 12 подспудно и въедливо сидят тысячелетиями в подсознании людей, заставляя их невидимой десницей производить мозговые манипуляции, основанные на сакральном духе арифметико-философской космогонии дюжины, и настойчиво включать их в самые разные схемы-построения, например:

- 12 стран образовали блок НАТО (1949).
- 12 государств подписали первую Женевскую Конвенцию (1864).
- 12 стран достигли соглашения (1998) по созданию транспортного коридора из Китая в Европу, в обход России.
- 12 пятиконечных звёзд на флаге Европы.



- 12 лучей на гербе Китайской Республики.
- После второй Мировой войны 12 городам в СССР была присвоена высшая степень отличия – звание «Город-герой». Последние из них Мурманск и Смоленск (1985). Понятно, что других уже не будет.
- 12 городов СССР имели запрет на жительство, как вид изгнания.
- 12 человек в первом отряде космонавтов СССР (7 марта 1960).
- 12 принципов анархиста (Лю Шифу, 1911).
- 12 тезисов союза социалистов (Л.Густав, Германия, 1914).
- 12 тезисов веры (И.Рабинович, 1883)
- 12 тезисов об античной культуре (А.Лосев, 1983).
- 12 тезисов против негерманского духа (12 апреля 1933), 12 лет правления третьего рейха.
- 12 судебных Нюрнбергских процессов (1946–1949).
- "12 спящих дев" (В.Жуковский), "12" (А.Блок).
- 12 присяжных заседателей.
- 12 подвигов Геракла.
- 12 жрецов бога Марса и 12 жрецов бога Квирина, входящих в Салии – жреческую коллегию Древнего Рима. Салии охраняли 12 щитов – анкилов.
- "12 таблиц" в римском своде законов.

- 12 причин непрерывности жизненного потока (индийская философия).

- Звезда Давида имеет 12 углов.
- 12 месяцев, 12 апостолов, 12 имамов – преемников Мухаммеда, 12 колен Израилевых…
- 12 Шива-лингам (сваямбху) в индуизме.
- 12 рас (духовных отношений-чувств) в гаудия-вайшнавизме.
- 12 аспектов таковости (бхутататхата).
- 12 ступеней созерцания в буддизме.
- 12 ливрейных лакеев для переноски трона с римским папой (до 1978 г.).
- 12 анафематствований в чине Православия.

- 12 концов коптского христианского креста в Египте
- 12 баз Аятана в буддизме; 12-членная формула бытия.
- 12 дочерей пророка Мани в манихействе.
- 12 принципов регулярности (Объединённая великая ложа Англии).
- 12 половых заповедей революционного пролетариата (А.Залкинд, 1924).
- 12 типов акцентуации (Леонгард, 1968).
- 12 традиционных олимпийских богов.
- 12 раундов в профессиональном боксе (с конца 80-х).
- 12 знаков зодиака – тридцатиградусных секторов эклиптики.
- Атомная единица массы = 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C.
- 12 округов Дуглас в разных штатах США.
- 12 основных приёмов экстремального программирования.
- 12 родов семейства тресковых рыб, 12-тактовый блюз.
- 12 принципов «Зеленой химии» (П.Анастас, Дж.Уорнер, 1998).
- 12 целебных трав русских знахарей. 12 разнотравий на Ивана Купала.
- 12 бинарных различительных признаков в лингвистике (Х.Моррис, 1952).
- 12 ликийских букв не имеют аналогов в греческом алфавите.
- 12 безоговорочных заимствований в древнеанглийском языке.
- 12 ветвей индоевропейской языковой семьи.
- 12 букв на автомобильных номерах (кодах) России: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х, сходных по начертанию с латинским алфавитом.
- 12 клеток в ряду игрового поля европейской рулетки.
- 12 нуклеотидов[10] – строительных блоков ДНК.
- 12 миллионов атомов распадается в 1 кг урана в течение секунды.
- 12-й первый секретарь компартии Белоруссии Н.Патоличев награжден 12-ю орденами Ленина (абсолютный рекорд). – Воистину, теория вероятностей, просто "отдыхает".

окончание следует…

[10] : http://ru.wikipedia.org/?oldid=34194942.

Литература:

1. *Додекада* / Символы, знаки, эмблемы: Энциклопедия / Под ред. В. Телицына. – 2-е изд. – М.: Локид-Пресс, 2005. 494 с. – http://slovari.yandex.ru/, http://ru.wikipedia.org/?oldid=26687979.

2. *Xiang-dong Hou*, *Mullen G.L.* Number of Irreducible Polynomials and Pairs of Relatively Prime Polynomials in Several Variables over Finite Fields // arXiv: 0811.3986v1. – 24 Nov 2008. – http://arxiv.org/abs/0811.3986.

3. *Delgado P.A.* Numerical Semigroups. – April 2009 – http://www.gap-system.org/Manuals/pkg/numericalsgps/doc/manual.pdf.

4. *Bras-Amoros M.* Bounds on the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2009. – Vol. 213, N. 6. – P. 997–1001. – http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0802/0802.2175v1.pdf.

5. *Aho A.V.*, *Sloane N.J.A.* Some Doubly Exponential Sequences // Fibonacci Quarterly. – Vol. 11 (1970). – pp. 429–437. – http://www2.research.att.com/~njas/doc/doubly.html.

6. *Rivera C.* The Prime Puzzles & Problems Connection: Puzzle 172. – http://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_172.htm.

7. *Василенко С.Л.* Гармоничное структурирование во внешней среде // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16198, 05.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02021140.htm.

8. *Гарднер М.* Математические досуги: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 496 с.

9. *Макарова Н.* Нетрадиционные магические квадраты из простых чисел. – http://natalimak1.narod.ru/netrpr.htm.