С.Л. Василенко

Золотое сечение в числовой мозаичной инвариантности

У человека два уха и *один* рот:
значит, два раза слушай, *один* раз говори.

(Турецкая пословица)

Смотри в оба, а в *один* – не мода.

(Русская пословица)

Натуральные числа являются, пожалуй, основополагающим объектом математики.

А самой главной цифрой этого ряда, конечно же, выступает единица с её особым статусом и сложностью постулирования, несмотря на здравый смысл и кажущуюся очевидность, известную со школьной скамьи.

В работе [1] отмечается несколько разных и необычных свойств такого, казалось бы, простого понятия, как *единица*.

Среди них: ее уникальность, многогранность и одновременная универсальность. Поверхностный взгляд показывает, что все здесь вроде бы элементарно и азбучно, но выразить "это все", по-прежнему чрезвычайно сложно.

Поэтому не случайно, что обычная единица или счетная палочка до сих пор не имеет единого и однозначного аксиоматически-математического определения или описания.

Достаточно упомянуть, что полное имя математического термина, обозначаемого символом "1", группа французских математиков (Бурбаки) дает через запись-сочетание несколько десятков тысяч логических и специальных знаков [2, с. 188].

В этой связи любые информационно насыщенные сведения о новых свойствах или проявления закономерностей вокруг единицы имеют непреходящее значение, пополняя копилку знаний об этом интереснейшем и редкостном феномене человеческой абстракции, который непосредственно связан с окружающей действительностью.

Так или иначе, но нас заинтересовали результаты исследований [1] по данному вопросу в связи числовой мозаики константы золотого сечения.

И мы решили попытаться его исследовать на предмет обоснования полученных закономерностей и их универсальности или пределов применимости.

Похожая мозаичная инвариантность, связанная с числом золотого сечения, обнаружена также С.Петуховым [3] при перемножении бисимметрических генетических матриц.

Напомним, что *инвариант* (в математике) – это свойство некоторого класса (множества) математических объектов оставаться неизменными при преобразованиях определённого типа [4]. Неизменность математических объектов, в частности их равенство единице, в частном случае соотносится с различной компоновкой цифровых комбинаций из некоторого структурообразующего набора (множества).

Формализованное обоснование. Для дальнейшего изложения материала нам понадобятся две вещи.

1. Напомним, что константа золотого сечения (большая часть относительно целого) определяется как положительный корень квадратного уравнения $x^2 + x = 1$:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618033988749895\,.$$

Умножая очевидное равенство $\phi^2 + \phi = 1$ последовательно на $\phi = \Phi^{-1}$, и произведя упрощения, достаточно легко выходим на единичное тождество

$$F_n\phi^{n-1} + F_{n-1}\phi^n = 1. \qquad (1)$$

Данное соотношение обладает явными свойствами симметрии по дискретному индексу n, где F_n – числа Фибоначчи, образующиеся по рекуррентной формуле

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

с начальными условиями $(F_0, F_1) = (0, 1)$.

Действительно, с учетом формулы Муавра–Бине, задающей числа Фибоначчи в аналитическом (явном) виде, имеем:

$$F_n\phi^{n-1} + F_{n-1}\phi^n = \frac{\Phi^n - (-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}\Phi^{-n+1} + \frac{\Phi^{n-1} - (-1)^{n-1}\Phi^{-n+1}}{\sqrt{5}}\Phi^{-n} = \frac{\Phi + \Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Многократное возведение в степень числа $\phi < 1$ существенно уменьшает результирующую величину, стремящуюся к нулю, что в свою очередь, компенсируется гиперболическим ростом значений чисел Фибоначчи.

В итоге мы получаем устойчивое соотношение (1), равное единице.

Понятно, что выполнение равенства зависит от точности представления входящих в него переменных.

2. Теософская редукция (нумерологическое сложение) – известный алгоритмический прием многократного последовательного сложения всех цифр анализируемого числа (с доведением в конечном итоге до одной цифры).

Такое НУМ-суммирование обладает одним любопытным универсальным свойством, которое сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а . Теософская редукция натурального числа не изменяется при произвольной перестановке в нем цифр и любом размещении между ними знаков сложения "+".

$$\mathrm{N}(x) = \mathrm{N}(x_n\ldots x_0) = \mathrm{N}(x_n\ldots x_\alpha) + \mathrm{N}(x_{\alpha+1}\ldots x_\beta) + \mathrm{N}(x_{\beta+1}\ldots x_\gamma) + \ldots + \mathrm{N}(x_{\delta+1}\ldots x_0),$$

где $n \ge \alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \ldots \ge \delta \ge 0$.

Из неравенства следует, что индексы могут быть и равными друг другу, что сводит число к одной цифре. В частности, $n = \alpha$ означает, что число $x_n\ldots x_\alpha$ состоит из цифры.

Например, опустив N для удобства записи, имеем

$$(1234567891) = (123)+(456)+(7891) = (12)+(34)+(56)+(78)+(91) = (1234)+(567891) = 1.$$

Теорема легко доказывается исходя из того, что оператор $\mathrm{N}(x)$ теософской редукции, как сокращение чисел до цифр, удовлетворяет *аддитивному* свойству [5]:

$$a + b = c \quad \text{—>} \quad \mathrm{N}(a+b) = \mathrm{N}[\,\mathrm{N}(a) + \mathrm{N}(b)\,] = \mathrm{N}(c).$$

Таким образом, как бы мы не составляли числа из цифр заданного числа, теософская редукция их суммы не изменяется.

Она определяется исключительно набором цифр.

Их последующее комбинирование не оказывает никакого влияния на конечный результат нумерологического суммирования.

А что, последнее означает в традиционной математике?

Процедура теософской редукции на обычном математическом языке в теории чисел эквивалентна замене исходного числа его остатком от целочисленного деления на 9 (с заменой $0 \to 9$) и определяется по формуле:

$$\mathrm{N}(x) = x \pmod 9,$$

которая читается как "x по модулю 9".

То есть, как и положено, в наличии имеется множество цифр (знаков), количество которых равно основанию позиционной системы счета. Только нули заменяются девятками.

В общем случае вместо 9 (уменьшенного на 1 основания десятеричной системы счисления) здесь может быть любое целочисленное основание системы счисления за вычетом единицы.

Пределы допустимости. Несколько освежив и пополнив наши знания, обратимся снова к работе [1].

Посмотрим, насколько написанная "ода единице" отражает реальное положение вещей, и откуда произрастают корни описанного, довольно необычного явления

Прежде всего, отметим, что, положив $\phi = 0{,}618$ и округлив до 3 значащих цифр, мы, тем не менее, получаем достаточно хорошую точность, поскольку следующая значащая цифра равна нулю.

С этой точностью (в три знака) наше равенство (1) соблюдается до $n = 7$.

И только при $n = 8$ сумма слева у нас получается 0,987.

Можно перейти и к числам, увеличенным в 10^3 раз (табл. 1).

Таблица 1

Проявление накопительной ошибки вычислений

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\phi^n \cdot 10^3$	10^3	618	382	236	146	90	56	34	21	13	8	5	3	2	1	1
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
$F_n\phi^{n-1} + F_{n-1}\phi^n$	–	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	987	987	987	987	987	987	987	987

Так, для $n = 2$ получаем: 618 + 382 = 1000. То есть нумерологическая сумма (или частное от деления на 9) равна 1. Дальше дело техники.

Какие бы сочетания из цифр (6,1,8,3,8,2) и в каком бы порядке мы не делали, НУМ-сумма от этого не меняется.

Это верно и для любой следующей группы цифр.

Например, равенство $3 \cdot 236 + 2 \cdot 146 = 1000$ приводит к совокупности знаков {326326326146146}.

Согласно вышеприведенной теореме мы теперь можем:

- *перемешать* эти цифры в любом порядке;
- *заменить* всякую группу цифр их арифметической суммой;
- *расставить* знаки плюс между произвольно выбранными цифрами или числами!

Но итоговое число всегда будет одинаково сравнимо по модулю 9.

Иначе говоря, остаток от деления на 9 здесь все время будет равен 1.

Это будет происходить для всех чисел, пока мы не дойдем до $n = 8$ (см. табл. 1), когда НУМ-сумма станет равна 6, поскольку вместо 1000 базовая формула (1) даст значение 987.

Здесь уже в кажущийся стройный порядок вмешивается такое понятие как накопительная погрешность, возникающая за счет отброшенного "хвоста" при округлении числа золотого сечения до трех значащих цифр.

Собственно и всё.

Так что в процедурном плане "золотая обитель единицы" [1] оказалась для нее временным местожительством, полностью зависящим от точности вычислительного процесса.

В идеальном случае, со сколь угодно малой погрешностью счета, единичное тождество (1) остается справедливым для любых значений n.

Примеры:

$1 = \phi + \phi^2 \approx 0{,}628 + 0{,}382$:

$$6+1+8+3+8+2 = 28 \to 2+8 = 10 \to 1;$$

$$61+83+82 \to 7+11+10 \to 7+2+1 \to 10 \to 1;$$

$$618 + 382 \to (6+1+8) + (3+8+2) \to 15+13 \to 6+4 \to 10 \to 1;$$

$1 = \phi^3 + \phi^3 + \phi^3 + \phi^4 + \phi^4 \approx 0{,}236 + 0{,}236 + 0{,}236 + 0{,}146 + 0{,}146$:

$$2+3+6+2+3+6+2+3+6+2+4+6+1+4+6 = 55 \to 10 \to 1;$$

$$236+236+236+146+146 \to 11+11+11+11+11 \to 2+2+2+2+2 = 10 \to 1;$$

$$2362+3623+6146+146 \to 13+14+17+11 \to 4+5+8+2 = 19 \to 1;$$

$$23623+62361+46146 \to 16+18+21 = 55 \to 1;$$

$$236236+236146+146 = 12277 \to 19 \to 1.$$

Образно говоря, получается почти как в законах Мерфи [6]:

в простых случаях, когда отчетливо виден один явно правильный вариант и один явно неправильный вариант, часто разумнее выбрать неправильный, чтобы быстрее приступить к неизбежным исправлениям.

Резюме:

1. $\phi = 0{,}618$ – хорошая точность для числа 0,61803, когда накопительная ошибка проявляет себя не скоро.

2. НУМ-суммирование зависит только от состава и комбинирования цифр, а также не зависит от их порядка или способов соединения (по две цифры, по три и т.п.).

Примечательно, что в данных числовых манипуляциях цифра 9 выступает исключительно как уменьшенное на 1 основание системы счисления.

Если мы перейдем в другую позиционную целочисленную систему счисления с основанием c, то аналогичные свойства (НУМ-суммирование или модуль числа) будут проявляться для величины $c-1$.

Некоторые вариации. За многие годы в теории ЗС накопилось много разных мифов или даже просто небылиц.

Дело, порой, доходит до нонсенсов, когда ЗС искусственно вводят в такие, казалось бы, удаленные сферы как ... кино.

О чём думал в своё время знаменитый режиссер С.Эйзенштейн в прославленном немом фильме "Броненосец Потёмкин" (1925) в пяти частях, три из которых происходят на корабле[1], сказать трудно, но золотосеченская точка кульминации в кино больше похожа на фантазию. Действительно, хороший фильм имеет волнообразный процесс, на разных нотах.

Но ЗС-апогей во времени – режиссерская фантазия, хотя бы потому, что зрителю заранее не известен полный хронометраж просматриваемой ленты.

В то же время существуют другие вполне обусловленные и хорошо обоснованные аспекты числовой инвариантности, связанной с ЗС.

---

[1] Имеет место явная привязка к числам Фибоначчи: 2 + 3 = 5.

1) Так, наиболее часто демонстрируемые геометрические построения на тему ЗС [7, с. 6] сводятся лишь к линейному сопоставлению меньшего и большего отрезков, причем чаще всего отдельно от единичной меры.

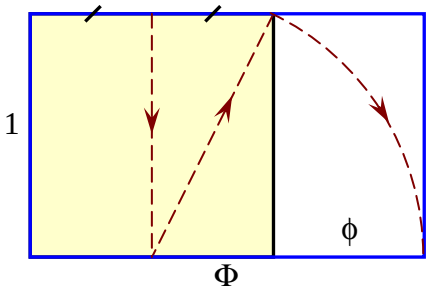

Рис. 1. Линейно-площадное представление числа ЗС

В этой связи представляет интерес следующая комбинированная интерпретация ЗС (рис. 1):

квадрат 1×1 разделяется пополам на два прямоугольника 1×1/2; в одном из них проводится диагональ длиной $\sqrt{5}/2$, которая поворотом совмещается с продолжением стороны квадрата, тем самым воспроизводя прямоугольник 1×Φ площадью Φ кв.ед.

С одной стороны, отрезок с константой ЗС располагается на линии, содержащей единичный отрезок, имея с ним общую точку отсчёта (левый нижний угол).

С другой стороны, образуется аналогичный инвариант относительно плоских фигур: квадрата 1×1 и прямоугольника 1×Φ.

Более того, рассматривая теперь большой прямоугольник, построенный по принципу ЗС, и отрезая от него слева квадрат, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон $1:\Phi = \phi:1$.

И такой инвариантно-фрактальный процесс бесконечен!

2) А вот еще один пример с совершенно неожиданной "числовой инвариантностью" [2].

Оказывается, что число, обратное 109, основано на сериях чисел Фибоначчи.

Так, 109^{-1} выражается периодической десятичной дробью с периодом в 108 символов.

Ограничившись половиной из них, получаем такую запись:

109^{-1} = 0,009174311926605504587155963302752293577981651376146788…

$1 - 109^{-1}$ = 0,990825688073394495412844036697247706422018348623853211…

Если теперь первые числа Фибоначчи мы разделим на 10 в степени 109 за минусом их позиции в последовательности (начиная с 0) и затем сложим вместе, то получим величину $1 - 109^{-1}$:

$\mathbf{0} \cdot 10^{-109}$ = …000000000000000

$\mathbf{1} \cdot 10^{-108}$ = …000000000000001

$\mathbf{1} \cdot 10^{-107}$ = …000000000001

$\mathbf{2} \cdot 10^{-106}$ = …000000000002

$\mathbf{3} \cdot 10^{-105}$ = …000000000003

$\mathbf{5} \cdot 10^{-104}$ = …000000005

$\mathbf{8} \cdot 10^{-103}$ = …000000008

$\mathbf{13} \cdot 10^{-102}$ = …00000013

$\mathbf{21} \cdot 10^{-101}$ = …0000021

$\mathbf{34} \cdot 10^{-100}$ = …000034

$\mathbf{55} \cdot 10^{-99}$ = …00055

$\mathbf{89} \cdot 10^{-98}$ = …0089

$\mathbf{144} \cdot 10^{-97}$ = …144

$\mathbf{233} / 10^{-97}$ = …33

$\mathbf{377} / 10^{-97}$ = …7

1 / 109 = …18348623853211...

[2] http://www.goldennumber.net/Number89.htm.

Заключение.

Итак, описанные в работе [1] закономерности представляют несомненный интерес и являются органическим симбиозом ряда важных вычислительных особенностей.

Первая связана со спецификой нумерологического суммирования (теософской редукции) или вычислений в десятеричной системе по модулю 9, когда результат не зависит от порядка следования и способ комбинирования составных цифр (см. теорему).

Второй аспект индуктивно вытекает из свойств ошибок округления, которые могут проявлять себя не сразу, а по мере их накопления (см. табл. 1).

И наконец, *третий* фактор обусловлен исходным единичным тождеством (1), которое и дает результирующую сумму (по модулю 9), равную 1. Понятно, если бы наше тождество было равно иной константе, например, трем, то и сравнение по модулю 9 приводило бы именно к этой константе "3".

В рассмотренном случае интересно и то, что операция по модулю 9 позволяет оценить точность результата. На том или ином этапе. И в этом контексте она выглядит как вполне приемлемая функция в традиционной математике, что сближает ее позиции с нумерологией.

Литература:

1. *Алферов С.А*. Золотая обитель единицы. – http://www.numbernautics.ru/content/view/623/30.
2. *Бурбаки Н*. Теория множеств. М.: Мир, 1965. – 456 с.
3. *Петухов С.В*. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и Золотое сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13422, 09.06.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321018.htm.
4. *Попов В.Л*. Инвариант // Математическая энциклопедия. – М.: Совет. энциклопедия, 1979. – Т. 2. – С. 526.
5. *Василенко С.Л*. Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15756, 17.01.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161603.htm.
6. *Блох А*. Закон Мерфи: Пер. с англ. – М.: Попурри, 2003. – 224 с.
7. *Stakhov A*. Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.

© ВаСиЛенко, 2011