С.Л. Василенко

Числовая гармония моноцифровой мозаики: репьюниты и репдигиты

Введение. Принято считать, что гармония больше тяготеет к природным явлениям или культурным срезам общества. Действительно, мироустройство вызывает неподдельный трепет и восхищение, несмотря на отдельные проявления небезопасных процессов, связанных со стихийными бедствиями.

Хотя с точки зрения планетарного уровня иерархии, например, те же вулканы столь важны и необходимы, как и кислород. В противном случае возникновение жизни на Земле было бы под большим вопросом.

Поэтому в общей картине эволюции Земли вулканическая деятельность, равно как и сопутствующие землетрясения и цунами, не менее гармоничны восхода и захода солнца.

Но есть еще один удивительный, ни на что непохожий гармоничный мир – это абстрактный мир математики.

Симбиоз[1] гармонии и математики как взаимодействие, взаимопроникновение и взаимно-полезное существование (совместная жизнь) проистекает от гармонизирующего начала числовых отношений и пропорций.

Подобно единению науки–искусства в симбиозе закономерностей математики и гармонии воссоздаются творения головы и рук человеческих, преображая зримый хаос и энтропию в удивительную симфонию идеальных форм и безукоризненных образов.

Математика – не только царица наук. Это муза гармонии и музыка природы.

Практически все математические понятия, так или иначе, опираются на понятие числа, а конечный результат любой математической теории, как правило, выражается на языке чисел [1, с. 4]. Даже в аналитической геометрии главная цель – это выразить геометрические понятия на языке чисел.

Вот и получается, что числа – единственный предмет изучения в математике.

С этим хорошо корреспондируется и знаменитая максима "все есть число", которая достаточно точно передает основную доктрину раннего пифагореизма [2].

Числовые структуры. Числа – чисто умозрительная сущность, используемая для описания счета и количества.

Многие из них, особенно натуральные числа по тем или иным признакам и свойствам группированы в отдельные структуры (совокупности) и имеют собственные имена:

– четные – нечетные, простые – составные и взаимно простые (без общих делителей);
– простые числа-близнецы (отличаются на 2);
– дружественные числа (каждое из них равно сумме делителей другого числа);
– фигурные, многоугольные;
– совершенные числа (равны сумме своих делителей);
– числа-палиндромы (равны своему "отражению");
– харшад (делятся на сумму своих цифр);
– самовлюбленные (числа Армстронга, равны сумме своих цифр, возведенных в степень, равную количеству его цифр);
– числа Смита (сумма цифр числа равна сумме цифр всех его простых сомножителей с учетом кратности);
– числа Софи Жермен (такие простые p, что $2p + 1$ тоже простое);
– числа Цукермана (делятся на произведение своих цифр);

[1] Симбиоз – от греч. συμ- *совместно* и βίος – *жизнь*.

– числа Серпинского (нечетное k, если для любого n число $k \cdot 2^n + 1$ – составное);
– числа Лейланда (представимы в виде целых $x^y + y^x$);
– числа Кармайкла (составные n, если $b^{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$ для всех b, взаимно простых с n);
– автоморфные (квадрат числа оканчивается самим числом в его цифрах);
– самопорожденные[2];
– круглые (натуральные степени основания системы счисления);
– магические числа (в физике соответствуют количеству нуклонов в атомном ядре, при котором полностью заполнена какая-либо его оболочка).

В процессе развития отдельных направлений математики, особенно комбинаторики, выделены также особые классы целых чисел, как правило, допускающих рекуррентно-аналитическое представление:

числа Бернулли, Мерсенна, Ферма, Фибоначчи, трибоначчи, Каталана, Стирлинга, Моцкина, Белла, Шрёдера, Деланноя, Эйлера и др.

В гармоничной мозаике числовых форм особое место занимают палиндромы, которые отличаются формой записи, совпадая со своим зеркальным отражением, и одинаково читаются слева направо и справа налево.

А среди них – частный случай моноцифрового написания чисел одинаковыми знаками.

Общие сведения. Моноцифровое число или репдигит (от англ. repdigit – repeated digit) – число с повторяющимися цифрами. Его также называют как "репдиджит" [3, с. 10].

Достаточно удобной, на наш взгляд, является его визуализация (обозначение) с применением нижнего индекса:

m_n – число, запись которого в выбранной позиционной системе счисления содержит n одинаковых цифр (знаков) m.

То есть цифра m повторяется n раз. Например, $1_4 = 1111$, $6_3 = 666$, $4_2 = 44$ и т.д.

Понятно, что запись m_0 буквально означает "пустое место".

В репдигитах геометрическое и арифметическое среднее их цифр совпадает.

Частный случай $m = 1$ в математике выделен отдельно.

Репьюниты (*repunit* [4] от англ. *repeated unit* – повторенная единица) – натуральные числа, которые в любой позиционной системе счисления записаны одними единицами [5; 6, с. 379]. Это слово всё чаще появляется в зарубежных статьях, приобретая силу нового международного термина.

Репьюнит[3] порядка (длиной) n – число, состоящее из n единиц: $R_n = 1_n$.

Это частный случай числа-палиндрома – "симметричного" числа (типа 16461), которое остается неизменным при прямом и обратном (реверсном) прочтении.

Очевидно, что репьюниты относятся к таким палиндромам, которые делятся на произведение своих цифр.

Еще Бернулли, Люка и другие известные математики занимались разложением на простые множители чисел, записываемых одними единицами. Интерес к этим числам, снова возрос в последнее время, особенно в связи с развитием теории арифметических кодов и методов помехоустойчивого кодирования в компьютерной технике [7].

В работе [8] собраны воедино известные, а также авторские находки свойств широко известного числа-репдигита 666 в самых разных математических интерпретациях. Показано, что существует немалое количество фантастически увлекательных трактовок такого притягательного своим изяществом числа. Многие из них имеют правдоподобную доказательную основу и, вопреки сложившимся малообоснованным стереотипам, характеризуют число 666 как символ совершенства.

---

[2] http://ru.wikipedia.org/?oldid=5905609.

[3] http://ru.wikipedia.org/wiki/Репьюниты, http://en.wikipedia.org/wiki/Repunit, http://mathworld.wolfram.com/Repunit.html.

Формализация.

В десятичной системе счисления репьюниты образуются аналитически по форме

$$1_n \equiv R_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9} = \sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} . \qquad (1)$$

Можно дать и рекуррентные определения репьюнитов:

$$R_n = 10R_{n-1} + 1,$$
$$R_n = 11R_{n-1} - 10R_{n-2},$$

с начальными условиями (затравочными числами) $(R_0, R_1) = (0, 1)$, $n = 2, 3, \ldots$

Образуем рекуррентный ряд $a_j = 10a_{j-1} + j$, $a_0 = 0$. Тогда репьюниты определяются как $1_n = \left\lceil \sqrt{a_{2n-1}} \right\rceil$ – целая часть корня квадратного из нечетных элементов ряда.

В частности, $\left\lceil \sqrt{12345} \right\rceil = 111 = 1_3$, $\left\lceil \sqrt{12345679011} \right\rceil = 111111 = 1_6$ (A068995[4]).

Моноцифровые числа (с цифрой m) имеют характерные особенности:

– возможность удобной записи;

– простая взаимосвязь с соответствующим определением по формуле

$$m_n = m \cdot 1_n$$

или

$$m_n = m\frac{10^n - 1}{10 - 1} = m\frac{10^n - 1}{9} = m\sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} .$$

В частных случаях возможны и собственные формулы.

Так, $6_n = \dfrac{10^{n+1} - 10}{15}$ (A073548).

Свойства и утверждения.

1. Утверждение. Числа 1_{2n} и 1_{2m} содержат общий множитель, равный 11.

Действительно, любое число, состоящее из четного количества единиц представимо в виде $1_{2n} = 11 \cdot 1(01)_{n-1}$ с сомножителем 11. Например, 11111111 = 11·1010101.

2. Утверждение. Число 1_{3n} делится нацело на 3·37=111.

3. Утверждение. Репьюнит с четным количеством единиц равен $1_{2n} = 1_n \cdot \overline{10_{n-1}1}$.

где $\overline{abcd}$ – число как последовательность цифр. Например, 1111111111 = 11111·100001.

4. Утверждение. Если $p \geq 7$ – простое число, то 1_{p-1} делится на p.

Доказательство. Поскольку p – простое число, не равное 2 и 5, то согласно малой теореме Ферма[5] число $10^{p-1} - 1$ делится на p [9, с. 265, с. 309].

Оно имеет вид 9_{p-1}. Но по условию $p \neq 3$, поэтому число 1_{p-1} тоже делится на p.

5. Утверждение. Если число m не делится на 2 и на 5, то найдется репьюнит, который делится на m.

---

[4] Сайт энциклопедии числовых последовательностей. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/.

[5] Малая теорема Ферма. Если p – простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} = 1(\mathrm{mod}\, p)$.

Доказательство [10]. Будем последовательно находить остатки от деления на m чисел 1, 11, 111 и т.д. Последовательность этих остатков бесконечна, но в тоже время для них имеется только m возможных значений (от 0 до $m-1$). Поэтому найдутся два разных репьюнита с одинаковыми остатками от деления на m ("принцип Дирихле"). Разность этих репьюнитов делится на m; в то же время она имеет вид $111...111000...000$, т.е. является произведением определенного репьюнита на некоторую степень десятки 10^k. Но число m взаимно просто с 10^k, значит, последний репьюнит делится на m.

6. Утверждение (о моноцифровом отображении). Натуральное n-значное число может быть представлено суммой не более n разных моноцифровых чисел (репдигитов).

На каждом шаге сравниваются две цифры: цифра a старшего разряда и непосредственно следующая за ней, но ей не равная, цифра b.

Тогда соответствующее моноцифровое число, оно же максимально возможное, равно

$$m = \begin{cases} a, & b > a, \\ a-1 \vee (9,\ a=1), & b < a. \end{cases}$$

На последнем шаге может остаться число 10 или в общем случае $1_n 0$.

Оно расщепляется по формуле $1_n 0 = 9_n + 1_n$.

Например, 1110 = 999 + 111.

Примерные разложения:

$79245 = 7_5 + 1_4 + 3_3 + 2_2 + 2_1 = 77777 + 1111 + 333 + 22 + 2;$

$76245 = 6_5 + 8_4 + 7_3 + 9_2 + 5_1 = 66666 + 8888 + 777 + 99 + 5.$

7. Подобно работе [11, с. 139] пусть символ $\perp$ между двумя числами обозначает, что они – взаимно простые или не имеют общих делителей, кроме 1.

Смысл данного обозначения весьма прост и нагляден: подобно перпендикулярным прямым, не имеющим совместного направления, условно "перпендикулярные" числа не содержат одинаковых сомножителей, кроме 1 – одной единственной точки.

Представляет интерес следующая теорема.

Теорема 1. $1_n \perp 1_{n+1}$.

Доказательство. Запишем два числа в виде обыкновенной дроби и преобразуем

$$\frac{1_{n+1}}{1_n} = \frac{\overline{1_n 0} + 1}{1_n} = 10 + \frac{1}{1_n}.$$

Отсюда видно, что исходная дробь несократимая, что и требовалось доказать.

Таким образом, два репьюнита, у которых номера – последовательные натуральные числа, являются взаимно простыми.

А вот, к примеру, другая дробь легко упрощается:

$$\frac{1_{n+2}}{1_n} = \frac{111111}{1111} = \frac{111100+11}{1111} = 100 + \frac{11}{1111} = 100 + \frac{1}{101} = \frac{10101}{101}.$$

С помощью репдигитов довольно просто доказывать отдельные утверждения.

Так, в теософской редукции (по Пифагору) важную роль играет одно характерное свойство чисел, которое легко обосновывается с привлечением репдигита 9_n.

8. Свойство. Число A и сумма его цифр $S(A)$ при делении на 9 дают одинаковый остаток.

Преобразуем исходное число A, составленное (записанное) цифрами a_i,

$$A=\sum_{i=0}^{m-1} a_i 10^i = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\left(9_i+1\right)=\sum_{i=1}^{m-1} a_i 9_i + \sum_{i=0}^{m-1} a_i = 9B+S(A).$$

Очевидно, что первое слагаемое делится на 9 нацело. Следовательно, при делении на 9 число A и сумма его цифр $S(A)$ дают один и тот же остаток, то есть $S(A)\equiv A\ (\mathrm{mod}\ 9)$.

9. <u>С в о й с т в о</u> (произведение репьюнитов):

$$1_k\cdot 1_n = 12\ldots(k-1)k_{n-k+1}(k-1)\ldots 21, \quad k\le 9.$$

Например, $1_3\cdot 1_4$ = 123321; $1_6\cdot 1_8$ = 1234566654321; $1_5\cdot 1_8$ = 12345554321.

Это означает, что в результате умножения репьюнитов $1_k\cdot 1_n$ получается палиндром вида $(12\ldots k\ldots 21)$ из $k+n-1$ цифр с цифрой k посредине, повторенной $n-k+1$ раз [3, с. 140]. Если репьюнит возводится в квадрат, то $n=k$, и в середине результата содержится только одна цифра (рис. 1).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{4-9}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ \hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & \times & & & 1 & 1 & 1 \\ \cline{2-7}
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ \hline
1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

Рис. 1. Умножение в столбик как схема образования палиндромов

11111111·11111111111111111 = $1_8\cdot 1_{17}$ = 1234567888888888887654321 = 1234567(8_{10})7654321.

Квадраты репьюнитов известны также как демло-числа [12, 13] с изящной производящей функцией (*S.Plouffe*, 1992)

$$-\frac{10x+1}{(x-1)(10x-1)(100x-1)} = 1+121x+12321x^2+1234321x^3+123454321x^4+\ldots$$

10. <u>Простые репьюниты</u>. Сегодня известно 8 простых репьюнитов 1_n с индексами n, равными 2, 19, 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297 (последовательность A004023).

Самое интересное, что индексы этих репьюнитов – также простые числа.

Хотя это и не столь неожиданно. Легко показать, если a делится на b, то и 1_a делится на 1_b. Поэтому чтобы число 1_n было простым, n должно быть обязательно простым.

Но это не достаточно условие. Так, 1_3 = 111 = 3·37 – непростое.

11. <u>Простые репдигиты</u>, кроме 1_n не получаются, поскольку $p_n = p\cdot 1_n$ делится на p.

Если же к ним добавлять отдельные цифры, например в начале или конце, то могут образовываться простые числа сколь угодно большой длины (табл. 1).

12. <u>Характерные репдигиты</u>. Репдигит 6_n равен среднему геометрическому двух разных палиндромов, больших 1: $6_n = \sqrt{4_n\cdot 9_n}$.

Действительно, $6_n = 6\cdot 1_n = \sqrt{36\cdot {1_n}^2} = \sqrt{(4\cdot 1_n)\cdot(9\cdot 1_n)} = \sqrt{4_n\cdot 9_n}$

Кроме того, куб числа 6_n равняется сумме кубов трех предыдущих "моноцифровых" чисел: $3_n^3+4_n^3+5_n^3=6_n^3$.

Например, $33333^3+44444^3+55555^3=66666^3$.

Таблица 1

Индексы *n*, для которых репдигиты с добавленной цифрой – простые ($k = n - 1$)

Вид	Формула	Шифр[6]	Индексы
1_k3	$(10^n+17)/9$	A097683	1, 2, 3, 5, 9, 11, 24, 84, 221, 1314, 2952 ...
2_k1	$(2\cdot10^n-11)/9$	A056660	4, 18, 100, 121, 244, 546, 631, 1494, 2566, 8088 ...
2_k3	$(2\cdot10^n+7)/9$	A096506	1, 2, 3, 8, 11, 36, 95, 101, 128, 260, 351, 467, 645, 1011, 1178, 1217, 2442 ...
3_k7	$(10^n+11)/3$	A099411	1, 2, 3, 6, 46, 394, 978, 2586, 2811, 2968, 3642, 4827, 4918, 5592, 5706 ...
4_k1	$(4\cdot10^n-31)/9$	A099412	2, 4, 11, 28, 55, 94, 475, 2080, 4835, 5845 ...
4_k3	$(4\cdot10^n-13)/9$	A096845	1, 2, 3, 6, 9, 12, 30, 32, 183, 297, 492 ...
5_k1	$(5\cdot10^n-41)/9$	A056684	12, 13, 609 ...
5_k9	$(5\cdot10^n+31)/9$	A056687	2, 8, 12, 18, 26, 32, 138, 188, 222, 338, 1002, 2744, 6530 ...
6_k7	$(2\cdot10^n+1)/3$	A096507	1, 2, 6, 8, 9, 11, 20, 23, 41, 63, 66, 119, 122, 149, 252, 284, 305, 592, 746, 875, 1204, 1364, 2240, 2403, 5106, 5776, 5813, 12456, 14235 ...
7_k3	$(7\cdot10^n-43)/9$	A056689	2, 3, 5, 9, 12, 15, 21, 264, 383, 2720, 4494 ...
7_k9	$(7\cdot10^n+11)/9$	A098089	2, 66, 86, 90, 102, 386, 624, 7784 ...
8_k7	$(8\cdot10^n-17)/9$	A056695	3, 4, 6, 9, 12, 72, 118, 124, 190, 244, 304, 357, 1422, 2691, 5538, 7581 ...
8_k9	$(8\cdot10^n+1)/9$	A096508	2, 14, 17, 35, 4175, 4472, 14576 ...
9_k7	10^n-3	A089675	1, 2, 3, 17, 140, 990, 1887, 3530, 5996, 13820, 21873, 26045 ...
31_n	$(28\cdot10^n-1)/9$	A056704	1, 2, 5, 10, 11, 13, 34, 47, 52, 77, 88, 554, 580, 1310, 1505, 8537 ...
51_n	$(46\cdot10^n-1)/9$	A056713	5, 12, 15, 84, 144, 150, 1235, 1727, 1812, 8687 …
61_n	$(55\cdot10^n-1)/9$	A056717	1, 5, 7, 25, 31, 112, 199, 533, 616, 718, 787, 1357, 2779, 3889, 4192 ...
71_n	$(64\cdot10^n-1)/9$	A056719	0, 1, 7, 55, 83461 ...
81_n	$(73\cdot10^n-1)/9$	A056722	2, 3, 26, 110, 141, 474, 902, 1746, 2997, 3627, 3788 ...
91_n	$(82\cdot10^n-1)/9$	A056726	2, 5, 20, 41, 47, 92, 161, 401, 455, 8570 ...
53_n	$(16\cdot10^n-1)/3$	A056714	0, 1, 3, 13, 25, 49, 143, 419, 1705 ...
73_n	$(22\cdot10^n-1)/3$	A056720	0, 1, 2, 3, 5, 53, 56, 343, 908, 1079, 2204, 2379, 9134, 9371, 9728 ...
83_n	$(25\cdot10^n-1)/3$	A056723	1, 7, 23, 29, 133, 173, 367, 1925, 3707, 5765, 9709 ...
37_n	$(34\cdot10^n-7)/9$	A056705	0, 1, 11, 17, 773, 18155 ...
57_n	$(52\cdot10^n-7)/9$	A056715	0, 2, 8, 14, 17, 18, 33, 35, 126, 183, 324, 344, 866, 992, 1226, 2355 ...
67_n	$(61\cdot10^n-7)/9$	A056718	1, 2, 4, 10, 13, 25, 115, 179, 181, 238, 785, 799, 1193, 1730, 1811, 1871, 2116, 2180, 17878, 22093 ...
87_n	$(79\cdot10^n-7)/9$	A056724	2, 9, 15, 32, 38, 65, 123, 173, 257, 320, 326, 639, 719, 774, 902 ...
97_n	$(88\cdot10^n-7)/9$	A056727	1, 2, 4, 19, 28, 73, 203, 220, 274, 292, 470, 763, 1891, 3307, 7007, 7306 ...
49_n	$5\cdot10^n-1$	A056712	2, 3, 4, 6, 14, 54, 210, 390, 594, 3460, 5028, 5219, 5332, 8072, 15796, 16131, 21456, 29282, 78790, 85142 ...
59_n	$6\cdot10^n-1$	A056716	0, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13, 22, 23, 28, 34, 40, 61, 73, 361, 490, 613, 1624, 2000, 2994, 4301, 4332, 18668, 32544, 34936 ...
79_n	$8\cdot10^n-1$	A056721	0, 1, 4, 5, 8, 10, 25, 49, 76, 128, 175, 238, 550, 796, 1219, 2012, 2846, 11336, 21296, 49808, 74318 ...
89_n	$9\cdot10^n-1$	A056725	1, 3, 7, 19, 29, 37, 93, 935, 8415, 9631, 11143, 41475, 41917, 48051 ...

[6] Сайт энциклопедии числовых последовательностей. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/.

Репдигит $2_6 = 222222 = 2{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37$ – наименьший палиндром, имеющий в разложении 6 простых сомножителей.

Репдигит 5_6 имеет 6 различных нечетных простых чисел $555555 = 3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37$.

Некоторые репдигиты делятся на суммы своих простых сомножителей:

$8_6 = 888888 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37$; 2+2+2+3+7+11+13+37=77; $888888 : 77 = 11544$;

$9_6 = 999999 = 3{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13{\cdot}37$; 3+3+3+7+11+13+37=77; $99999 : 77 = 12987$.

Числа 6_6 и 8_6 являются наименьшими числами, которые имеют соответственно 34 и 38 делителей-палиндромов.

$8_6 = 888888$ – единственный шестизначный палиндром, который может быть выражен в виде разности квадратов простых чисел ровно одиннадцатью различными способами:

$$947^2 - 89^2 = 953^2 - 139^2 = 1063^2 - 491^2 = 1087^2 - 541^2 = 1117^2 - 599^2 = 1597^2 - 1289^2 =$$
$$= 3433^2 - 3301^2 = 5737^2 - 5659^2 = 8573^2 - 8521^2 = 15887^2 - 15859^2 = 74077^2 - 74071^2.$$

Репдигит 7_n при умножении на 3 и добавлении 1 дает палиндром:

$$7_n \cdot 3 + 1 = \overline{23_{n-1}2}\,.$$

Примечательно, что $2{\cdot}6_n - 1 = 13_{n-2}1$ – тоже палиндром (A069882). Равно как и $9_n + 2 = 10_n1$ (A082274) или $6{\cdot}9_n + 1 = 59_{n-1}5$ (A083835).

С учетом свойства основания десятичной системы $10 = 2{\cdot}5$, справедлива формула

$$2_{n-1} \cdot 5 = 1_n\,.$$

6_n-треугольные числа содержат только 1 и 2, причем $\dfrac{6_n(6_n+1)}{2} = 2_n1_n$.

А $(6_n)^2 = 4_{n-2}35_{n-2}6$, то есть квадраты чисел содержат только цифры 3, 4, 5 и 6 (A137120).

13. <u>Встроенные цифры</u>. Среди простых чисел, у которых все цифры (кроме центральной) единицы, известен палиндром весьма внушительной длины (1749 цифр) [14]:

$$\underbrace{11...11}_{874}9\underbrace{11...11}_{874}\,.$$

14. <u>Палиндромы-фигуры</u>.

```
           1
          131
         13331
        1333331
       131333131
      13331113331
     1313311133131
    133133111331331
   13311131113111331
  1113313311133133111
 111133133111331331111
11111111111111111111111
```

Располагая простые числа-палиндромы построчно, можно составлять симметричные фигуры, отличающиеся оригинальным рисунком из повторяющихся цифр.

Интересен числовой треугольник в виде красивой комбинации из простых палиндромов, записанных с помощью 1 и 3. Он привлекает внимание своим изящным обрамлением из единиц.

Фигуру окаймляют два простых репьюнита одинаковой длины: 23 единицы составляют основание и ещё столько же – боковые стороны треугольника.

15. <u>Взаимодействие.</u> Репьюинты довольно изящно могут взаимодействовать с другими палиндромами.

Пусть четное количество единиц образуют число a, а вдвое меньшее количество четверок – число b.

Тогда число $a + b + 1$ всегда является полным квадратом [15; 16, с. 139,].

В наших обозначениях это выглядит следующим образом:

$$1_{2n} + 4_n + 1 = \left(\overline{3_{n-1}4}\right)^2.$$

Например,

$$11 + 4 + 1 = 16 = 4^2,$$
$$1111 + 44 + 1 = 1156 = 34^2,$$
$$111111 + 444 + 1 = 111556 = 334^2 \ldots$$

16. <u>Цифровая гармония</u>. Репьюинты довольно изящно могут взаимодействовать с другими палиндромами.

Представляет интерес проследить гармонию репдигитов (A178630)

$$18 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)^2 = 18 \cdot 1_n{}^2 = 9_n \cdot 2_n,$$

$n = 1$: . . . . 18 = 9 · 2;
$n = 2$: . . . . 2178 = 99 · 22;
$n = 3$: . . . . 221778 = 999 · 222;
$n = 4$: . . . . 22217778 = 9999 · 2222;
$n = 5$: . . . . 2222177778 = 99999 · 22222;
$n = 6$: . . . . . . 222221777778 = 999999 · 222222;
$n = 7$: . . . . . 22222217777778 = 9999999 · 2222222;
$n = 8$: . . . . 2222222177777778 = 99999999 · 22222222;
$n = 9$: . . . 222222221777777778 = 999999999 · 222222222.

Подобные свойства характерны не только для пары чисел (9, 2), но и для иных однозначных чисел (9, k), например (n = 10):

$$1 \cdot 9 \cdot (1111111111)^2 = 111111111\,0\,888888888\,9;$$
$$2 \cdot 9 \cdot (1111111111)^2 = 222222222\,1\,777777777\,8;$$
$$3 \cdot 9 \cdot (1111111111)^2 = 333333333\,2\,666666666\,7;$$

или в общем виде

$$k \cdot 9 \cdot 1_n{}^2 = \overline{k_{n-1}(k-1)(9-k)_{n-1}(10-k)}.$$

17. <u>Репдигиты в магических квадратах.</u> Магические квадраты (МК) давно занимают математиков. Установлено, что существует единственный магический квадрат 3×3.

Остальные получаются из него поворотом вокруг центра либо отражением относительно его осей симметрии. Умножая все числа на общий множитель 1_n, получаем множество нетрадиционных МК с магической константой $S_n = 16_{n-1}5$, состоящих из моноцифровых чисел (рис. 2).

S_n = **15**		
4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

$\mathbf{16_{n-1}5}$		
$\mathbf{4_n}$	$\mathbf{9_n}$	$\mathbf{2_n}$
$\mathbf{3_n}$	$\mathbf{5_n}$	$\mathbf{7_n}$
$\mathbf{8_n}$	$\mathbf{1_n}$	$\mathbf{6_n}$

16665		
4444	**9999**	**2222**
3333	**5555**	**7777**
8888	**1111**	**6666**

Рис. 2. Нетрадиционные магические квадраты моноцифрового типа

Представляют также интерес МК, состоящие из простых чисел. Подобный квадрат 3×3 впервые построил Дьюдени (рис. 3).

Примечательно, что его магическая константа равна репьюниту 1_3 = 111 = 3·37. Причем это минимальная константа для МК, составленного из простых чисел (единица здесь условно считается простым).

	67	1	43	111
	13	37	61	111
	31	73	7	111
111	111	111	111	111

Рис. 3. Магический квадрат Дьюдени из простых чисел с магической константой 111

18. Последовательности Фибоначчи. Числовые ряды образуются по рекуррентной формуле $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 1$.

Если принять начальные условия $(f_0, f_1) = (33, 111)$, то $f_{20} = 888888 = 8_6$.

При такой паре $(f_0, f_1) = (2^2 \cdot k, 3^3 \cdot k) = (4k, 27k)$ получается $f_{14} = k_5$ или k-репдигит.

Например, $(f_0, f_1) = (2^2 \cdot 2, 3^3 \cdot 2) = (8, 54)$, $f_{14} = 2_5 = 22222$.

19. Деление репьюнитов. Целая часть частного от деления на n числа, записанного n единицами (A089303), равна

$$a_n = \left\lceil \frac{10^n - 1}{9} \Big/ n \right\rceil = \left\lceil C_n^1(10)/n \right\rceil,$$

где $C_n^k(q) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1-q^{n-i}}{1-q^{i+1}}$ – коэффициент $(k \leq n)$ q-биномиальный (коэффициент биномиальный[7] Гаусса) [17; 18, с. 19].

Перейдя к обозначению числа с n единицами $1_n = \underbrace{\overline{11...11}}_{n}$, запишем $a_n = \lceil 1_n / n \rceil$.

Можно показать, что $\lim\limits_{q \to 0} \frac{(q)_n}{(1-q)^n} = n!$ и $C_n^k(1) = C_n^k$ (справа – обычный биномиальный коэффициент), где $(q)_n = (1-q)(1-q^2)...(1-q^n)$ – q-факториал числа n.

Например, $\lceil 1_{16}/16 \rceil = 694444444444444 = \overline{694_{12}}$.

Легко также убедиться, что результат деления двух репьюнитов выражается формулой

$$\frac{R_{mn}}{R_m} = \sum_{i=1}^{n} \left(10^m\right)^{i-1}$$

и представляет последовательность из n единиц, которые отделены друг от друга цепочкой из $m-1$ нулей.

Например, $1_{24}/1_6 = 1_{6*4}/1_6$ = 1000001000001000001.

Если число a представимо как произведение двух целых сомножителей (> 1) m различными способами, то R_a можно записать в виде $2m$ разных вариантов [3, с. 148].

Так, 24 = 2·12 = 3·8 = 4·6.

Тогда

$$1_{24} = 11 \cdot 1\underline{0}1010101010101010101;$$

$$1_{24} = 111 \cdot 1\underline{00}1001001001001001001;$$

---

[7] http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/proseminar/QBinom.pdf.

$$1_{24} = 1111 \cdot 1\underline{000}10001000100010001;$$

$$1_{24} = 111111 \cdot 1\underline{00000}1000001000001;$$

$$1_{24} = 11111111 \cdot 1\underline{0000000}100000001;$$

$$1_{24} = 111111111111 \cdot 1\underline{00000000000}1.$$

Довольно интересны и периодические дроби для репьюнитов, $n > 1$

$$\frac{1}{1_n} = 1_n^{-1} = 0,\left(\overline{0_{n-1}9}\right).$$

Например, $1/1_6 = 0,000009\,000009\,000009\ldots$.

20. Взаимосвязь репьюнитов. Приведем некоторые формулы, устанавливающие связь репьюнитов между собой.

$$R_{n+k} = 10^n \cdot R_k + R_n;$$

$$R_n^{\ 2} = 10^{n-k} \cdot R_k^{\ 2} + R_{n+k} R_{n-k};$$

$$R_{n+k}^{\ \ 2} = 10^k \cdot R_n^{\ 2} + \sum_{i=1}^{k} 10^{k-1} R_{2(n+i)-1}.$$

21. Полезные закономерности. Каждое натуральное число N можно рассматривать как сумму произведений t-значных чисел a_n на степень 10 с показателем, кратным t:

$$N = a_n 10^{nt} + a_{n-1} 10^{(n-1)\,t} + \ldots + a_1 10^t + a_0 10^0 = \sum\nolimits_i 10^{it} a_i\ .$$

С учетом такого представления целых положительных чисел можно формулировать полезные закономерности на основе репьюнитов $1_n = R_n = \underbrace{11\ldots11}_{n}$ [3, с. 125–128].

Т е о р е м а 2. $N \equiv \sum\nolimits_i a_i \left(\operatorname{mod} R_t\right)$.

Доказательство. Из определения репьюнита (1) имеем $10^t - 1 = 9R_t$, откуда следует $10^t \equiv 1\left(\operatorname{mod} R_t\right)$. Тогда для всех k справедливо $10^{kt} \equiv 1\left(\operatorname{mod} R_t\right)$, поэтому $N = \sum\nolimits_i 10^{it} a_i \equiv \sum\nolimits_i a_i \left(\operatorname{mod} R_t\right)$. Теорема доказана.

Это означает, что можно получить остаток от деления числа N на репьюнит, разделив на него сумму чисел соответствующей значности.

Например, для $t = 4$ и $1_4 = 1111$:

$$75\,8123\,6735\,6123 = 75 \cdot 10^{12} + 8123 \cdot 10^8 + 6735 \cdot 10^4 + 6123 \cdot 10^0 \equiv 1058 \ (\operatorname{mod} 1_4) \equiv$$

$$\equiv 75 + 8123 + 6735 + 6123 \ (\operatorname{mod} 1_4) \equiv 15501 \equiv 1 + 5501 \ (\operatorname{mod} 1_4) \equiv 1058 \ (\operatorname{mod} 1_4).$$

С л е д с т в и е. Если $p \mid R_t$, то $N \equiv \sum\nolimits_i a_i \left(\operatorname{mod} p\right)$.

Обозначение $a \mid b$ читается "a делит b" или "b кратно a".

Представляет интерес еще одна теорема [19] о делимости репьюнитов.

Теорема 3. Пусть $p \equiv (1, 13 \text{ или } 19) \pmod{20}$ – простое и $q = 2p + 1$ – также простое. Тогда q – делитель репьюнита 1_p.

Другими словами, если p, делящееся на 20 с остатком 1, 13 или 19, и $q = 2p + 1$ – простые числа, то репьюнит 1_p содержит простой сомножитель q.

Например,

$p = 41 \equiv 1 \pmod{20}$, $q = 83$, $1_{41} = \mathbf{83} \cdot 1231 \cdot 201763709900322803748657942361 \cdot 538987$;
$p = 53 \equiv 13 \pmod{20}$, $q = 107$, $1_{53} = \mathbf{107} \cdot 1659431 \cdot 1325815267337711173 \cdot 47198858799491425660200071$.

Исходя из известных свойств делимости чисел на 3 и 9, очевидны следующие свойства:

$$1_{3n} \equiv 0 \pmod 3, \qquad 1_{9n} \equiv 0 \pmod 9.$$

22. Рендигиты в многоугольных числах.

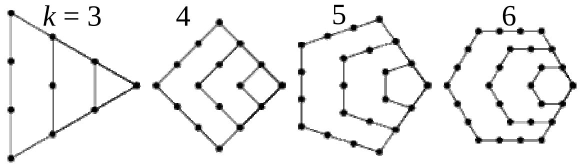

Рис. 4. Генетика фигурных (k-угольных) чисел $P(k, n)$ на примере $n = 4$

В работе [20] рассматриваются многоугольные[8] (polygonal) или k-угольные числа (рис. 4), которые одновременно есть репдигиты (моноцифровые числа), состоящие из единственной повторяемой цифры.

Последовательность k-угольных чисел имеет вид:

$$P(k, n) = n + (k-2)\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{(k-2)(n-1)+2}{2} = \left(\frac{k}{2}-1\right)n^2 - \left(\frac{k}{2}-2\right)n, \quad k, n \ge 2;$$

$$P(k+1, n) = P(k, n) + n(n+1)/2;$$

$$P(k, n+1) = P(k, n) + n(k-2) + 1.$$

Например,

$P(2, 3) = 33$, $P(12, 3) = 333$, $P(112, 3) = 3333$;

$$P\left(\overline{1_m 2}, 3\right) = 3_{2+m};$$

$P(5, 4) = 22$, $P(3705, 4) = 22222$, $P(3703705, 4) = 22222222$;

$$P\left(\overline{(370)_m 5}, 4\right) = 2_{2+3m};$$

$$P\left(\overline{3_m 4}, 3\right) = 9_{m+1}, \quad P\left(\overline{5_m 7}, 5\right) = 5_{m+2}, \quad P\left(\overline{4_m 6}, 6\right) = 6_{m+2},$$

$$P\left(\overline{(037)_m 2}, 7\right) = 7_{1+3m}, \quad P\left(\overline{(031746)_m 2}, 8\right) = 8_{1+6m}.$$

В статье [21] приведены все "фантастические" многоугольные числа моноцифрового вида до 10^{50} со своими повторяющимися периодами, среди них:

$P\left(\overline{147(306397)_m 5}, 33\right) = 7_{6+6m}$, $P\left(\overline{(529100)_m 531}, 21\right) = 1_{6+6m}$,
$P\left(\overline{(105820)_m 3}, 36\right) = 6_{3+6m}$, $P\left(\overline{216049(382716049)_m 40}, 9\right) = 7_{9+9m}$ и т.д.

А вот такое многоугольное число

$$P(8925662618878671, 387) = 666666666666666666666 = 6_{21}$$

наращивается одними шестерками с периодом, равным 1344.

---

[8] http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_Numbers.

23. Наибольшее известное число Смита (2005), буквально захватывающее дух, равно

$$S = 9 \cdot R_{1031} \cdot (10^{4\,594} + 3 \cdot 10^{2\,297} + 1)^{1\,476} \cdot 10^{3\,913\,210}$$

и содержит простой репьюнит R_{1031}.

Сумма цифр числа S равна сумме цифр его простых сомножителе с учетом кратности.

24. Примечательно, 1_{20} и 3_{10} – самопорожденные числа. То есть, у них нет генератора типа "цифрового сложения" и, по выражению Капрекара [13], "они порождают сами себя".

Так, число 25 в сумме с его цифрами (2+5) порождает число 32, которое уже является порожденным числом.

Совершенные числа. Говоря о числовой гармонии, нельзя хотя бы вскользь не упомянуть о совершенных числах (СЧ) – натуральных числах, которые равны сумме всех своих собственных положительных делителей (включая 1, но исключая само число):

$$6 = 1 + 2 + 3; \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \quad \text{и т.д.}$$

Знаменитый древнегреческий математик Никомах (2 в. н. э.) писал: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны... совершенных чисел немного».

Именно поэтому неопифагорейская академия наук насчитывала 28 членов [21].

Совершенные числа сродни золотой пропорции. В старину они считались божественными.

Еще Евклид показал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 – простое число, является совершенным числом (СЧ). И уже Эйлер, спустя две тысячи лет, доказал, что все четные СЧ имеют такой вид: $M_p\left(M_p+1\right)/2 = 2^{p-1}\left(2^p-1\right)$, где $M_p = 2^p - 1$ – простое число Мерсенна [9].

Поиски четных СЧ превратились в высокотехнический вид спорта с установлением мировых рекордов в охоте на большие простые числа [22, с. 21].

На апрель 2010 года известно 47 четных СЧ [10]. Нечетных СЧ до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует.

Формула Евклида позволяет без труда доказывать многочисленные свойства совершенных чисел.

Например, все совершенные числа треугольные. Это значит, что, взяв совершенное число шаров, мы всегда сможем сложить из них равносторонний треугольник [23].

Все четные СЧ (кроме 6) являются частичной суммой кубов последовательных нечетных натуральных чисел: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots$ [24]

$$\sum_{k=1}^{2^{(p-1)/2}} (2k-1)^3 = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right) = P\,.$$

Вообще-то очевидно, но тем менее удивительно, что сумма величин, обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна двум.

---

[9] Согласно эффективному критерию простоты Люка–Лемера простые числа Мерсенна давно удерживают лидерство как самые большие известные простые числа. Они играют важную роль в теории чисел, криптографии и генераторах псевдослучайных чисел с большими периодами.

[10] $2^{43\,112\,609}-1$ – есть самое большое известное на сегодня простое число Мерсенна, подтвержденное расчетами. Оно найдено в 2008 году и содержит 12 978 189 десятичных цифр.

Например,

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=1+\frac{14+7+4+2+1}{28}=2.$$

Доказано (*Ruiz*), что *n* – совершенное число, если выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n-2} i\left\lceil\frac{n}{i}\right\rceil = 1+\sum_{i=1}^{n-1} i\left\lceil\frac{n-1}{i}\right\rceil,$$

где $\lceil\xi\rceil$ – целая часть числа ξ.

Вместо заключения. Числовые конструкции абстрактны. В реальной жизни чисел нет.

Хотя мы можем наделять отдельные объекты теми или иными свойствами чисел и выполнять разнообразные операциями на основе выбранной меры количества.

И тем совершеннее выглядят стройные цифровые комбинации.

Гармония чисел абсолютна. Как и безотносительна сама математика.

Гармония чисел не зависит от моды, симпатий или настроения человека.

Неповторимая созвучность, симметрия и слаженность исходит от числовой мозаичной гармонии моноцифровых образований, и прежде всего, репьюнитов и репдигитов, вырисовываемых целыми рядками в первом классе.

Их многочисленные "красивые" свойства и закономерности являются ярким и убедительным подтверждением красоты и гармонии математики.

Вовсе неслучайным и даже знаковым является то, что в эпоху монопольной "власти чисел и геометрии" около девятнадцати веков гармония или гармоника (а после Боэция – "музыка" в её гармонических или звуковысотных аспектах) была одной из четырех математических наук и дисциплин [25].

Гармония являлась неотъемлемой частью математики или той составляющей, которая изучала числовые отношения и пропорции.

Этот исторический факт свидетельствует о том, что де-факто гармония существовала как математическая дисциплина.

Они и сегодня неразрывны и взаимообусловлены.

Какую бы область математики мы не взяли, везде найдем отголоски гармоничного отражения абстрактного мира в его знаковых и геометрических формах.

Но особое благозвучие, конечно, исходит от цифровой мозаики.

Здесь наличествуют не только ажурные кружева цифровых конфигураций, но и заключенные в них числовые структуры, которые отражают соизмеримые количества.

Литература.

1. *Кириллов А.А.* Что такое число? – М.: Физматлит, 1993. – 80 с. – http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/chislo.htm.
2. *Жмудь Л.Я.* Всё есть число? К интерпретации "основной доктрины" пифагореизма / Mathesis. Из истории античной науки и философии. – М.: Наука, 1991. – С. 55–74. – http://ec-dejavu.ru/n/Number.html.
3. *Ейтс С.* Репьюниты и десятичные периоды: Пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – 256 с.
4. *Beiler A.H.* "11111 ... 111." Ch. 11 in Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains. New York: Dover, 1966.
5. *Кордемский Б.* На часок к семейке репьюнитов // Квант. – 1997. – № 5. – С. 28–29. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/pdf/1997/05/kv0597kordemsky.pdf.
6. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надежным шифрам: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 416 с.

7. *Дадаев Ю.Г.* Теория арифметических кодов. – М.: Радио и связь, 1981. – 272 с.

8. *Василенко С.Л.* 666 – символ совершенства и актуальной бесконечности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15872, 08.04.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161632.htm.

9. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учеб. пособие. – М.: МЦНМО, 2007. – 608 с.

10. *Удивительные приключения* периодических дробей // Квант. – 1989. – № 8. – С. 23–30. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/, http://ega-math.narod.ru/Quant/Fracti.htm.

11. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. – 3-е изд., стереот. – М.: Мир, 2009. – 703 с.

12. *Weisstein E.W.* Demlo Number // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/DemloNumber.html.

13. *Kaprekar D.R.* On Wonderful Demlo Numbers // Math. Student, **6**, 68–70, 1938.

14. *Карпушина Н.* Палиндромы и "перевертыши" среди простых чисел // Наука и жизнь. – 2010. – № 5. – http://www.nkj.ru/archive/2010/5/.

15. *Все про числа*. – http://arbuz.uz/t_numbers.html.

16. *Хонсбергер Р.* Математические изюминки: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 176 с.

17. *Weisstein E.W.* q-Binomial Coefficient // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/q-BinomialCoefficient.html.

18. *Кузьмин О.В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 294 с.

19. *Repunit* / Computational Number Theory. – 2010. – N 96. – http://www3.alpha-net.ne.jp/users/fermat/index.html.

20. *Keith M.* On Repdigit Polygonal Numbers // Journal of Integer Sequences. – Vol. 1 (1998), Article 98.1.6. – http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/keith.html.

21. *Депман И.Я.* Совершенные числа // Квант. – 1991. – № 5. – С. 13–17, 22. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1991/05/sovershennye_chisla.htm.

22. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю.* Живые числа: Пер. с нем. – М.: Мир, 1985. – 128 с.

23. *Совершенная красота* и совершенная бесполезность совершенных чисел // Компьютерра. – 2001. – № 30 (407). – http://www.arbuz.uz/z_sov1.html.

24. *Weisstein E.W.* Perfect Number / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html.

25. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.