С.Л. Василенко

Систематика золотой пропорции: обобщение и динамика

"*Цель научного мышления – видеть общее в частном и вечное в преходящем*".
Альфред Уайтхед (1861–1947),
английский математик, логик, философ

Введение. Нам уже приходилось ранее высказываться в части непомерного увлечения некоторыми авторами процессом обобщения золотой пропорции. Вроде и аргументы приводились убедительные, например, о том, что константы не обобщаются в принципе.

К сожалению, приходится констатировать, что метастазы искусственного золочения числовых величин и пропорций пустили довольно глубокие корни и время от времени дают о себе знать новыми "сенсационными" заявлениями.

Это вовсе не безобидные деяния, ибо в русской пословице давно подмечено:

«Первый камень криво в землю врос – вся стена пошла наперекос».

По самым строгим канонам логики хорошо известно [1, с. 395], что обобщение понятий подразумевает исключение видового признака. Тем самым образуется новое понятие более широкого объема, но менее конкретного содержания.

Это классика, апробированная временем и практикой в самых разных областях науки и ставшая уже азбучной истиной, не подлежащей ревизии.

Примерная цепочка обобщений[1]:

МГУ → Государственный университет → Университет → ВУЗ → Учебное заведение
→ Учреждение → Организация → Субъект публичного права → Субъект права

«Разум – есть способность видеть связь общего с частным» (И.Кант). Мы бы ещё добавили: "логическую" связь, то есть причинно обусловленную и непротиворечивую.

Для уяснения всё здесь достаточно просто, поскольку регулируется законом обратного отношения между содержанием и объемом понятия: если одно понятие шире (*уже*) другого по объему, то оно беднее (*богаче*) его по содержанию.

Например, *золотая пропорция*. Здесь видовой признак "золотая". При обобщении он естественно уходит, и остается только пропорция. В свою очередь ей можно назначать другие видовые признаки. В частности, походит "квадратичная пропорция", приводящая своим решением к квадратному уравнению общего вида. И то, что одним из миллиардов частных решений она одновременно имеет золотое сечение, не имеет никакого значения.

Пропорция, как равенство двух отношений. Здесь видовой признак "равенство". При обобщении оно уходит, и остается *соответствие* (*сопоставление*) *отношений*, которое может включать в себя уже как равенства, так и неравенства.

Кроме того, могут быть также отношения эквивалентности со своими классами эквивалентности, образующих разбиения множеств и т.д.

Но как только, кроме числа золотого сечения, мы называем золотыми иные числа, являющиеся решением другого алгебраического уравнения, мы сразу попадаем в собственный терминологический капкан (тупик).

Ведь тогда, следуя изначально принятой логике, наибольший по модулю действительный корень любого (!) алгебраического уравнения автоматически, становится обобщенным золотым сечением.

Однако это уже выходит за рамки рациональных воззрений в математике.

---

[1] Обобщение понятий // Википедия. Обновление: 20.09.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=27927772.

Постановка задачи. Критику обычно не любят. Хотя, если разобраться и отбросить наносное, то её нужно принимать исключительно с благодарностью.

Критические высказывания – это не только и не столько отрицательное суждение, сколько выявление противоречий, анализ, научная проверка достоверности и т.п.

Например, в работе [2], посвященной, в том числе вопросам структурирования моделей золотого сечения (ЗС) на три составляющие "ЗС – квазиЗС – псевдоЗС", высказано несколько замечаний по статье [3].

Позволим себе их воспроизвести для удобства читателя:

> «Исходные данные результатов наблюдений он нормирует $v' = v/v_{\max}$ и по ним строит простые регрессионные модели преимущественно параболического вида $y' = ax'^2 + bx'$, принимая в частности, $b = 1 - a$.
>
> По утверждениям автора выскажем несколько замечаний:
>
> 1) Подобное нормирование не влияет на сокращение объема фактических данных, необходимых для установления количественных связей.
>
> 2) Решение (регрессионное соотношение), полученное для каких-нибудь одних условий, не становится универсальным или пригодным для всех.
>
> 3) Разброс значений параметра a слабо влияет на характер кривых /рис. 11/. Приведенное значение $a = 0.618$ для массы древесной зелени и хвои сосны с таким же успехом может быть, например, 0.60 или 0.65, и совершенно не иметь никакой связи с числом золотой пропорции.
>
> ... И уже совсем не понятно, когда при подсчете массы древесной зелени хвойных деревьев перемножаются разнородные физические величины: килограммы и диаметры стволов».

Автор назвал [4] нашу критику необоснованной. В известной степени с этим можно согласиться. Действительно, нами озвучивались некоторые почти очевидные тезы, которые, в силу своей общности, не требовали особых обоснований.

Так, вышеназванные пункты п.1 и п.2 представляются естественными положениями в теории регрессионного анализа [5–9]. Что-либо добавлять к сказанному ненужно.

Равно как и вдаваться в незначительные детали-подробности.

Но если на наше утверждение, что «не понятно, когда... перемножаются разнородные физические величины» [2], появляется ответ: «в описании примера реализации способа» автор «перепутал цифры» [4], значит, замечания всё-таки имели подоснову.

Так или иначе, но первоначальный материал [3] ещё более расширяется [4], получает дальнейшее развитие, причем уже с персональной увязкой наших заключений [2].

У нас нет особого желания дискутировать. Да и полемика ради полемики вредна.

Мы также не обладаем необходимыми сведениями о спектре знаний оппонента предметной области. Кроме того, есть вещи, для обоснованности которых необходимо больше времени и места, а краткая дискуссия способна лишь катализировать ненужный спор, не привносящий положительную динамику в развитие теории. Чрезмерное же увлечение доказательной базой рискует превратиться в нудную лекцию.

Поэтому не будем излишне полемизировать.

А задачу поставим в иной плоскости: попытаться больше поразмышлять вместе на предмет "обобщения не обобщаемого".

В основу возьмем авторский материал [4], поскольку в нем:

– многократно упоминаются наша статья [2], собственно именно ей она и посвящена;
– более широко представлен философский аспект и собственные авторские рассуждения;
– появилось изложение совершенно нового понимания специфики золотого сечения, что вызывает резонно-встречные вопросы.

Обзор-размышление. Работа [4] очень удобно распределена на отдельные пронумерованные позиции. Воспользуемся этим в своих комментариях-размышлениях с целью удобства сопоставления.

1. Автор ведет речь вокруг «способа (метода) обобщения результатов наблюдений с помощью формулы»:

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}. \qquad (1)$$

И далее уравнивает разные представления: «При таком обобщении (нормировании по 1)...».

Но разве данная формула сама по себе что-то обобщает? – Нет. Количество измерений остается прежним. Данные лишь преобразуются и приводятся к относительным (безразмерным) величинам. В то время как «обобщение результатов наблюдений» предполагает сжатие информации, нахождение соответствующих причинно-следственных связей (например, в виде статистических моделей), теоретическое обоснование, определение вероятностных характеристик и т.п. [5–10].

Автор продолжает настоятельно утверждать, что преобразование или нормирование (1) «резко сокращает объем фактических данных, необходимый для установления количественных связей между ними». Но неужели нормировка способна оказать влияние на количество потребной информации? – Было бы очень здорово. Можно даже сказать – на уровне серьезнейшего научного открытия-прорыва в теории информации.

Но, к сожалению, это не так. Применение формулы (1) не связано с планированием экспериментов и никоим образом не указывает на момент достаточности или наоборот нехватки данных натурных наблюдений для адекватного анализа.

«Определенная новизна статьи /2/ заключается в том, что в приведенных в ней примерах показана практическая полезность нормирования по 1 не только функции, но и аргумента» [3]. – Безусловно, любые примеры несут в себе элементы новизны. Хотя собственно нормирование зависимой и независимой переменных по формуле (1) хорошо известно и давно применяется в различных методах обработки данных.

2. В качестве аргументации приводится «график зависимости массы зелени и хвои от диаметров ствола сосны в лесах Республики Коми», который и в самом деле, буквально по 10 точкам, хорошо воспроизводит параболическую зависимость.

Однако простой анализ показывает, заслуга здесь исходит не от преобразования (1), а генетически присуща характеру изучаемых взаимосвязей даже без использования этой формулы. И потом частный график (из триллионов других зависимостей для различных физических переменных) не может служить обоснованием утверждения общего характера.

3. А вот и почти сенсационное заявление: «более универсальным и результативным по охвату различных случаев взаимодействия оказывается подход, базирующийся на обобщенном Золотом Сечении (ОЗС), которым может быть любое число, заключенное между 0 и 1». – По степени индуктивного умозаключения автор здесь явно обошел других исследователей. Его теоретический размах становится на порядок выше теперь уже совсем скромных обобщений в виде целочисленных p- и s-сечений.

Теперь получается, что отныне любое деление единичное отрезка – это ОЗС (?).

Даже "золотоискатели-ортодоксы" не доходили до подобных утверждений, видя в них противоречивые элементы непоследовательности.

Получается нечто похожее на логический парадокс воронов (Гемпель, 1940).

Хотя понятно, если мы случайным образом выбираем любое число в интервале (0, 1), то оно не зависит от других чисел ни по названию, ни по значению.

Например, одной трети всё равно, существуют ли иррациональные числа, как они называются, есть ли среди них золотое сечение и т.д.

4. Любопытна и другая реплика: «Анализ показывает, что в большинстве случаев процесс взаимодействия двух величин, выраженных как доли целого, описывается полиномом второй степени с коэффициентами, в сумме равными единице и делящими ее в отношении близком к ЗС». – Об обоснованности подобного вывода мечтают десятки учёных.

Но, увы, о "большинстве случаев" говорить пока не приходится.

Разве что имеют место отдельные эпизоды в земном обустройстве, не говоря уже о мироздании в целом. Хотя как гипотетическая связь такая модель вполне приемлема.

5. «Ряд, составленный из величин Ф, при разных целочисленных $n \geq 1$ ... называется Обобщенным Золотым Сечением (ОЗС)». – Возникает явное противоречие с п. 3, что так и не дает возможности установить чёткого понимания ОЗС.

Хотя в нашем представлении обе эти позиции не имеют ничего общего с математическими положениями, ибо золотое сечение, как числовая константа, не может обобщаться.

«ЗС – это наиболее часто встречающаяся пропорция близких к равновесию оппозиций во всех системах Мироздания». – Весьма поверхностный и слабо аргументированный тезис. Он свойственен большинству "золотоискателей", когда желаемое выдать за действительное берет несомненный верх.

6. Автор утверждает, что «последовательность ОЗС открыта уже в наше время белорусским ученым Э.М.Сороко», и далее дает ссылку на работу А.Стахова [11], вводя читателя в заблуждение. Может, ошибка в нумерации? – Вроде нет, в противном случае цитируемая работа А.Стахова останется вообще без ссылок.

И сразу же идет оригинальный текст: «Члены ОЗС соответствуют идеальным пропорциям на всех уровнях упорядоченности (при всех n, не только при $n = 2$). <u>Величины n могут быть и дробными числами</u>, от 0 и выше» (подчеркнуто мною – *С.Л.*).

Возникает закономерный вопрос, как можно уместить в одну числовую последовательность члены ОЗС, соответствующие дробным числам? – Разве что всю вещественную числовую ось теперь назвать единой последовательностью ОЗС, где любое число становится золотым сечением (?).

Кроме того, в п. 5 основное уравнение (для ОЗС) $\Phi^n + \Phi = 1$ записывается исходя из представлений о геометрическом среднем «"элементарных" частиц (субсистем) в системе».

Но среднее геометрическое, как и любое другое среднее по Колмогорову, имеет реальный смысл только для дискретного набора действительных чисел $x_1, ..., x_n$ [12].

Кстати, такие известные средние величины как медиана и мода, нельзя представить в виде средних значений по Колмогорову [13, п. 2.1.3].

7. Далее автор берет из нашей работы два числа 0,608 и 0,392, как представителей квазиЗС. Правда с неточным цитированием их наименований (хотя они и "берутся в лапки").

Затем, с помощью отвлеченных числовых манипуляций, в общем случае приемлемых практически для любых чисел в интервале (0, 1), они объявляются как «типичные представители ОЗС». Этим самым, по сути, "обосновывается" п. 3, что ОЗС – это любое число, заключенное между 0 и 1 (!?). – Без комментариев. Вероятно, здесь какие-то описки.

8. Причудливым образом объединяются разные понятия, как-то: "показатели гармонии", "долговечность", "число частиц в системе" и т.п. с еще более ортодоксальным выводом: «максимальная долговечность достигается при значениях n (частиц в системе), близких к 2». – Можно предположить, речь идет о водороде, но автор это не поясняет, равно как и что такое "частицы в системе".

А наше утверждение из статьи [2] получает неожиданное продолжение: «Так, что ироническое высказывание С.Л.Василенко, о том, что все, что заключено между 1,5 и 2 является ЗС, на самом деле близко к действительности» [4]. – Мы долго размышляли над этой трактовкой.

То ли ироническое высказывание близко к действительности, когда и автор поддерживает эту нашу иронию?

То ли сарказм здесь не уместен, и действительно, все, что заключено между 1,5 и 2 является ЗС? – Судя по характеру статьи, надо полагать, что все-таки второе.

Автор действительно считает, что любая пропорция с соотношением от полутора до двух – это ЗС (?). – В этом случае также "no comment"!

9. В заключение записывается регрессионное соотношение $k' = 0{,}093n'^2 + 0{,}910n'$ и утверждается, что «константы полученного полиномиального уравнения обладают всеми признаками ЗС». – Приходится только гадать, каким же таким всем (!) признакам ЗС может удовлетворять пара чисел: 0,093 и 0,910?

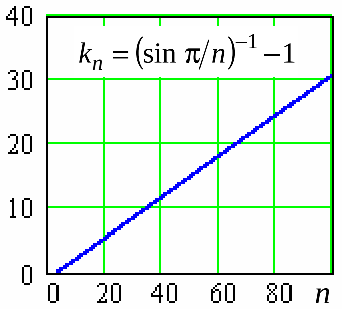

Рис. 1. Отношение радиусов: n равных кругов вокруг одного, как "ожерелье на шее"

Ну, а то, что регрессионной зависимости понадобилось мало точек, нет ничего удивительного, и тем более в преобразовании (1). Истина состоит в другом.

Исходные переменные k, n геометрически связаны формулой $k_n = (\sin \pi/n)^{-1} - 1$.

Зависимость почти линейная (рис. 1).

Предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n}{n} = \dfrac{1}{\pi}$.

Более того, область изменения значений переменных не имеет максимума, поэтому преобразование (1) к ним неприемлемо.

Если что и несет упомянутое уравнение регрессии, то излишние недоразумения.

Движение мысли: от статики к динамике.

Итак, мы в очередной раз убедились, что чрезмерное увлечение обобщенным "золотосечением" мало чего характеризует по существу, разве что наименование, запрограммированное на привлечение внимания.

Будет какая-либо величина называться обобщенным ЗС, или просто числом, ничего особо не меняется, но возникает элементарная терминологическая путаница. А отсюда и отсутствие непонимания в полемике.

Очевидно, что алгебраическое уравнение общего вида (порядка n) своим частным решением всегда содержит ЗС через квадратный трехчлен с единичными коэффициентами:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Но никто, нигде и никогда не называет это уравнение или его корни ОЗС.

Попробуем теперь отбросить золоченый глянец и без предубеждений, но более внимательно посмотреть, что ж все-таки скрывается за фасадом колерованных терминологических интерпретаций?

В основу положим, на наш взгляд, важное авторское наблюдение [3], что в отдельных случаях «процесс взаимодействия двух величин, выраженных как доли целого, описывается полиномом второй степени с коэффициентами, в сумме равными единице и делящими ее в отношении близком к ЗС».

Действительно, на примере натуральных чисел мы привыкли считать, что квадрат числа n^k обычно больше основания n. Но вот на вещественной положительной полуоси есть небольшой участок (0, 1), где всё происходит наоборот, а именно $x^k < x, \quad x < 1$.

Представим уравнение парной регрессии в виде суммы параболы и прямой линии.

Они имеют свои весовые коэффициенты $y = ax^2 + (1-a)x$, сложение которых дает 1. То есть зависимая переменная отражается суммой двух процессов: квадратичного и линейного, каждый со своим удельным весом (рис. 2).

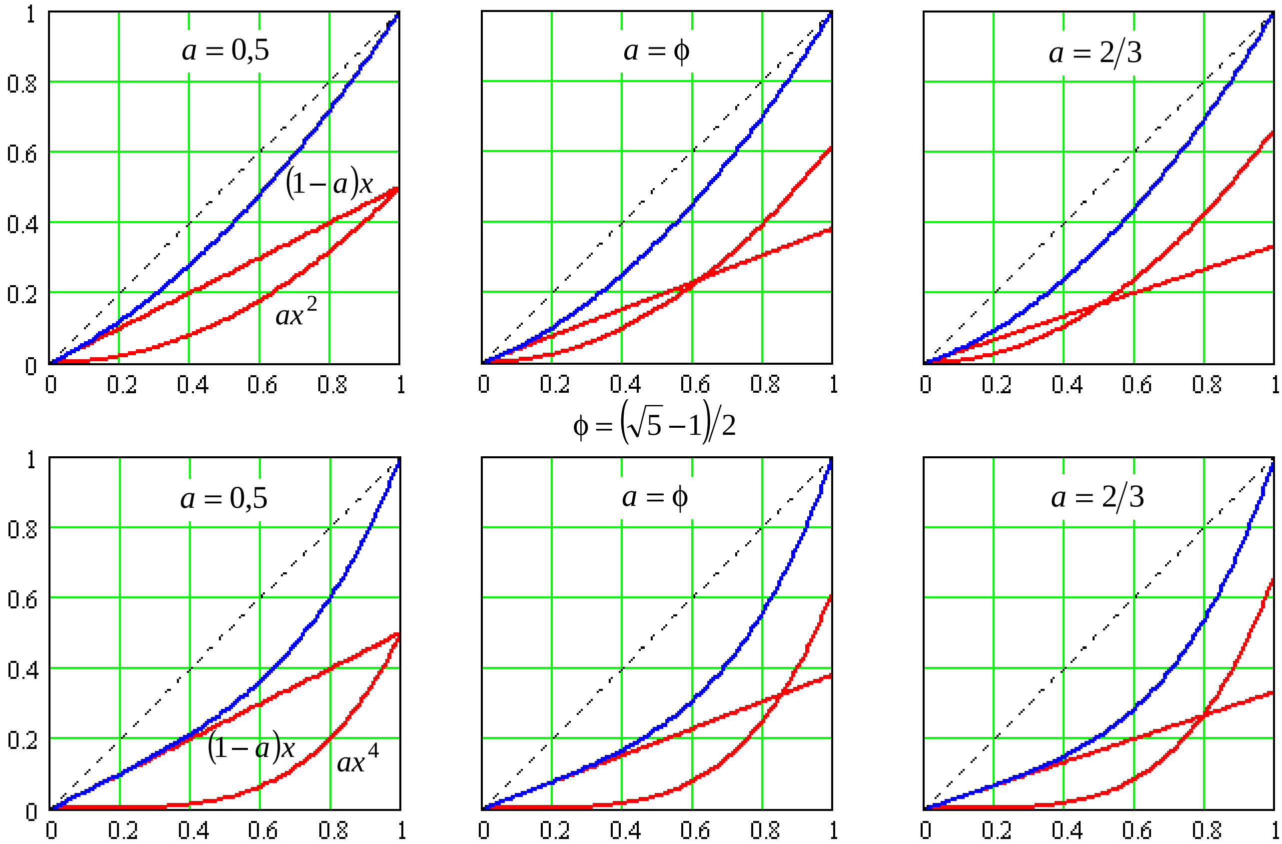

Рис. 2. Разложение линии регрессии на две компоненты:
$ax^2 + (1-a)x$ – вверху, $ax^4 + (1-a)x$ – внизу

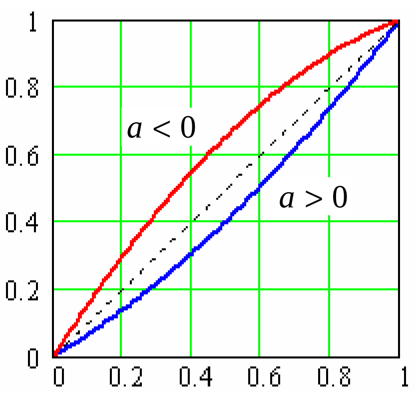

Рис. 3. Выпукло-вогнутые линии регрессии $y = ax^2 + (1-a)x$

Причем в общем случае параметр a может быть и отрицательным (рис. 3).

В принятом контексте можно изучать, какие тенденции в исследуемом процессе проявляются больше: квадратичные или линейные? Так, при $0 < a < 0{,}5$ прямая линия и парабола исходят из начала координат и больше нигде не пересекаются. При $a = 0{,}5$ прямая линия и парабола имеют общие точки на краях. Но в обоих случаях на всем интервале изменения переменных линейные тенденции преобладают над квадратичными.

Когда $a > 0{,}5$, графики пересекаются, и появляются участки, на которых уже нелинейность является более предпочтительной в части влияния на конечный результат.

В зависимости от параметра a точка пересечения – плавающая (табл. 1).

Примечательно, но параметр a в две трети дает нам здесь удивительный результат: парабола и прямая пересекаются ровно посредине (x = 0,5).

При этом зависимая переменная увеличивается на треть. После чего превалируют уже квадратичные закономерности.

Таблица 1

Координаты точек пересечения линейной и нелинейной зависимостей

$y = ax^2 + (1-a)x$			$y = ax^4 + (1-a)x$		
a	x	y	a	x	y
1/2	1	1	1/2	1	1
ϕ	ϕ	$2\phi^3$	ϕ	$\sqrt[3]{\phi}$	$2\sqrt[3]{\phi^7}$
2/3	1/2	1/3	2/3	$1/\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{4}/3$

В определенном смысле модель (функциональная зависимость)

$$y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2x^2 + x}{3} = 0{,}666..x^2 + 0{,}333..x$$

не менее реалистична, чем модель $y = \phi x^2 + \phi^2 x$.

Обратим также внимание на комплиментарность (взаимное дополнение) форм.

В первом случае потеря абсолютного значения у квадрата числа, меньшего единице, восполняется весовым коэффициентом, равным двум.

С использованием соотношения $1 - \phi = \phi^2$ второе "золотоносное" уравнение

$$y = \phi x^2 + \phi^2 x \qquad (2)$$

приобретает стройный симметричный вид и идеальную строгость.

Действительно, перед нами красивая гармоничная модельная структура.

И уже только поэтом уровень доверия к ней самопроизвольно возрастает.

Надо полагать, что это еще одно реальное проявление золотого сечения, в частности, в соотношении параметров растений.

Так, в начальные годы жизни у многолетних растений наблюдается как бы линейный рост длинными молодыми побегами. Через некоторое время картина меняется, и на смену приходит уже квадратичный характер роста, затрагивающий всю структуру растений (деревьев). Объекты становятся пышнее и округлее.

На физическом уровне золотое сечение проявляется в едином процессе как соотношение между двумя формами (гармониками): нелинейного и линейного роста.

Можно сказать, что имеет место внутренне проявление ЗС, которое при обратном переходе от преобразованных переменных к их реальным размерностям видоизменяется и становится ненаблюдаемым для идентификации и скрытым для прямого восприятия.

Так, в результате замены нормированных величин (x, y) их фактическими значениями $(X, Y) = (x \cdot X_m, y \cdot Y_m)$ через максимальные параметры (X_m, Y_m) получаем:

$$\frac{Y}{Y_m} = \phi\left(\frac{X}{X_m}\right)^2 + \phi^2 \frac{X}{X_m} \qquad \text{или} \qquad Y = Y_m \frac{\phi}{X_m^2} X^2 + Y_m \frac{\phi^2}{X_m} X .$$

Таким образом, именно уравнение (2) следует считать весомой и содержательной частью в приобретении новых знаний о золотом сечении, вытекающих из работы [3].

Даже если речь идет о модели квазиЗС, «в основе которой лежит конкретное число, близкое к золотой пропорции» [2].

Но вместо того чтобы развивать теоретические линии ЗС на новом объекте, автор переключает и концентрирует основное внимание [1, 3] на совершенно оторванных от реалий вопросах, небито обобщенных золотых сечениях, которые покрывают весь отрезок (0, 1), когда любая точка на отрезке единичной длины является ОЗС (?)

Можно сказать, набрели на золотую жилу, посмотрели, и пошли дальше ... строить "эфемерно-воздушные замки ОЗС". Воистину «цену вещи узнаешь, когда потеряешь».

Более целесообразным и эффективным действом можно предложить освободиться от пут терминологических наслоений в виде ОЗС, противоречащих законам логики [1, с. 395], а основное внимание сконцентрировать на теоретическом обобщении идеи золотого сечения в развивающихся структурах.

Первое здесь – неосновное, второе – главное.

Не зря говорят на Руси: «пожалеешь малое – потеряешь большее».

Зато в результате отмежевания от, мягко говоря, спорных суждений в виде ОЗС, формируется реальное и новое направление в развитии математических основ гармонии на базе подходов ЗС, но уже в переходе от статики к динамике.

Приходится только сожалеть, что в азарте расширения свойств ЗС на всю числовую ось (?) исследовательское внимание не зафиксировалось на теоретическом обобщении самого ЗС, хотя для этого были все предпосылки.

Дело оставалось только в осмыслении и правильной расстановке акцентов. Но, увы...

Выводы.

1. Понятие "обобщенных золотых сечений" (ОЗС) противоречит логике обобщения, подразумевающей исключение видового признака, каковым является слово "золотое".

2. Распространение понятия ОЗС на всю числовую ось или равномощный отрезок (0, 1) тем более не обосновано, вносит хаос в апробированную терминологию, и это действие следует признать ошибочным.

3. Уравнение $y = \phi x^2 + \phi^2 x$ взаимосвязи двух нормированных к единице переменных (x, y) с использованием весовых коэффициентов на основе числа золотого сечения ϕ отражает структуру роста с "золотым" отношением между линейными и квадратичными формами (составляющими, свойствами-тенденциями).

4. Для направленности последующих теоретико-практическими исследований и соответствующей апробации соотношение $\boxed{y = \phi x^2 + \phi^2 x}$ предлагается назвать "золотой" моделью роста.

Вместо заключения.

В завершение начатого разговора хотим выразить искреннюю признательность профессору А.Коновалову за его добротную идею в части новой интерпретации ЗС, а также за его критические высказывания, которые нами приняты исключительно с благодарностью.

Примечательно, но именно заочная полемика в "горячем" и быстро протекающем режиме общения на страницах «Академии Тринитаризма» позволила не только найти действительно полезные линии на фоне маловыразительных и алогичных обобщений, но и выйти в конечном итоге на довольно любопытный, если не сказать, уникальный результат.

Надеемся, что и наши встречные замечания поспособствуют объективной оценке достигнутого уровня, переосмыслению некоторых положений с последующим продвижением к новым знаниям.

Так или иначе, но "золотая" модель роста даёт нам веские основания считать, что золотоносная тема по-прежнему жива, а горизонты её осмысления еще более расширяются.

Главное здесь – не попасть в ложные объятия псевдоЗС, когда налево и направо золотится всё, что ползает и летает, чем наносится непоправимый вред самой идее ЗС.

Не менее, а может и более важно, несмотря ни на что, максимально сохранять объективность и научную этику, самокритичность и чувство меры.

Литература:

1. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник: 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
2. *Василенко С.Л.* Квазизолотая пропорция в структурированных системах // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.
3. *Коновалов А.А.* Обобщение результатов наблюдений и золотое сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16024, 31.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161685.htm.
4. *Коновалов А.А.* О способе обобщения данных и обобщенном золотом сечении // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16075, 18.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161703.htm.
5. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ: Пер. с англ., 3-е изд. М.: Диалектика, 2007. – 912 с.
6. *Радченко С.Г.* Устойчивые методы оценивания статистических моделей. – К.: ПП "Санспарель", 2005. – 504 с.
7. *Живописцев Ф.А., Иванов В.А.* Регрессионный анализ в экспериментальной физике. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 208 с.
8. *Валеев С.Г.* Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. – М.: Наука, 1991. – 270 с.
9. *Демиденко Е.З.* Оптимизация и регрессия. – М.: Наука, 1989. – 292 с.
10. *Василенко С.Л., Оленюк М.И.* Моделирование качества воды в водотоках. – Харьков: Основа, 2006. – 232 с.
11. *Стахов А.П.* Роль "Золотого Сечения" и "Математики Гармонии" в преодолении "стратегических ошибок" в развитии математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321074-45.pdf.
12. *Колмогоров А.Н.* Избранные труды: Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 136–138.
13. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. – М.: Экзамен, 2006. – 671 с.