С.Л. Василенко

Золотоносные жилы в планиметрии

Не выдавай шумихи за золото.
Русская поговорка.

Пирамида Хеопса под лупой на аптекарских весах. В абстрактном числовом пространстве математики первую золотоносную жилу начали разрабатывать еще в древности.

Не исключено, что первые крупицы золотой пропорции (ЗП), как начальные проблески математических подходов в гармонии, нашли египтяне, вавилоняне или майя за много веков до начала летоисчисления от Р.Х.

Однако каких-либо внятных и веских доказательств этому пока не найдено.

Существуют только отдельные гипотезы-предположения.

Например, есть мнение, что в основу строительства самой высокой и самой объемной египетской пирамиды Хеопса была положена ЗП. Угол при основании пирамиды составляет $51°52'$ и очень близок к углу прямоугольного треугольника с соотношением катетов около $1{,}272 \approx 14/11$, равным корню квадратному из числа ЗП.

Но убедительных свидетельств этому нет.

До сих пор остается спорным, имеет ли это отношение к ЗП (по проекту) или просто дело случая, поскольку другие пирамиды подобным свойством не обладают.

Многие из них очень близки к рациональным дробям-отношениям типа $(3:4:5)$-формы, в которой основание прямоугольного треугольника относится к его высоте как 3:4 или $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Вполне вероятно, что размеры основания четырехгранной пирамиды закладывались из расчета достичь в процессе строительства иные простые формы согласно целочисленным отношениям, в частности 14/11 [1].

Но в процессе послойной сборки из неидеальных каменных блоков возникала накопительная погрешность по вертикали, что и приводило к изменению проектной высоты.

В результате расчетные углы немного сбивались.

«Если рассматривать все пирамиды в совокупности (а не только одну пирамиду Хеопса), то открыть принцип их построения не так уж трудно, но он не будет иметь ничего общего с золотым сечением. Следует различать, что видели в пирамидах египтяне эпохи Древнего царства, и как их понимали египтяне во времена Геродота» [2, с. 299].

Так или иначе, но египетская золотая крупица, скорее всего, оказалась алхимической, и ей не было суждено превратиться в "месторождение золотой пропорции".

Никакого реального продолжения или развития в судьбоносности ЗП эта история не получила, о чем более подробно можно узнать в статье [1].

Первые отчетливые проявления золотоносной жилы мы находим только в знаменитых "Началах" Евклида, хотя и здесь не все так гладко.

Время неповторимо, как неповторимы отпечатки пальцев или как разнятся пирамиды.

Не случайно иносказательно говорят: «история учит тому, что ничему не учит».

Поэтому, по достоинству восхищаясь великой мудростью наших предков, стоит отдавать себе отчет, какая временная эпоха-дистанция лежит между нами.

Следует четко представлять, что древние греки использовали ЗП в своих геометрических построениях преимущественно для правильного пятиугольника, и «целостность их мировоззрения формировалась без рационального оформления феномена ЗП. Если бы было иначе, они прямо бы указали на него» [3].

Золото Евклида. Мы уже частично исследовали вопрос [4] об уровне представления золотой пропорции Евклидом. Некоторые пояснения можно также найти в комментариях [1, с. 299–300].

Но один важный момент все ж "остался за кадром".

Он касается соподчиненности или эволюционного генезиса.

Дело в том, что сама по себе задача ЗП линейная.

Главным объектом является ограниченная прямая (отрезок), которая «делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему» [5, с. 173].

Какое-либо дальнейшее развитие эта задача в одномерном представлении не получает, но находит свое применение в планиметрии для вычерчивания Евклидом правильного пятиугольника (предложение 4.11, книга IV), в основу построения которого берется особый равнобедренный треугольник – прообраз золотого треугольника в современной терминологии.

Предложение 4.10. Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании, вдвое большим остающегося (рис. 1) [5, с. 132–133].

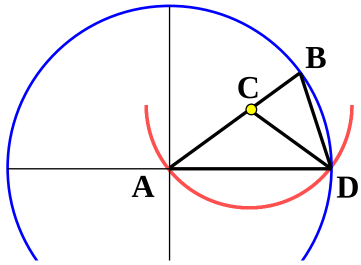

Рис. 1. Геометрические построения к Предложению 4.10 Евклида (о треугольниках ЗС – в современной интерпретации)

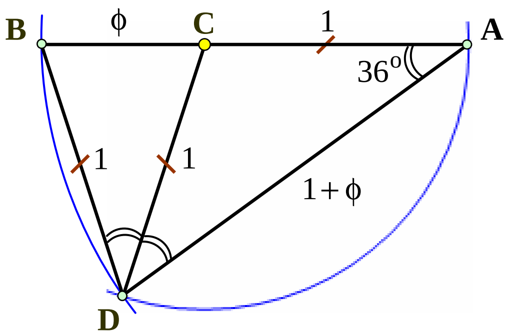

Рис. 2. Треугольники ЗС

1. Проводим прямую AB и отмечаем на ней точку C – золотого сечения (ЗС) в современной терминологии.

2. Описываем окружность AB(A) – радиусом AB вокруг центра A.

3. Описываем окружность CA(C).

4. Через их точку пересечения проводим отрезки AD, CD и BD.

Получаем равнобедренный треугольник ΔABD, у которого углы при основании B и D вдвое больше угла при вершине A, то есть соответственно равны: 72^o, 72^o, 36^o.

Отрезок BD – сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность AB(A).

Соединение вершин через одну даст правильный пятиугольник.

Треугольники BCD и ACD – также равнобедренные по построению.

Идея Евклида понятна: полный угол треугольника мы разбиваем на 5 частей по 36^o среди трех его углов: $(2+2+1)36^o = 180^o$. Наличие таких 5 частей в угловой мере позволяет их легко перенести на 5 частей угловой меры для полного угла 2π и построить правильный пятиугольник, вписанный в окружность.

Треугольники BCD и ABD подобны. Треугольник ACD содержит все те же 5 частей по 36^o между его тремя углами: $(3+1+1)36^o = 180^o$.

У Воробьева [6, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

Хотя в сокращенном варианте они часто называются просто золотыми [7].

Если больший отрезок AC условно принять за 1, то меньший станет равен $\phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, и все стороны приобретают реальные размерности (рис. 2).

П р о б а   з о л о т а . Хорошо известно, что золотые сплавы выше 750 пробы (75,5 % Au) не тускнеют на воздухе. Низкопробные изделия со временем блекнут.

Посмотрим еще раз внимательно на рис. 2 и попытаемся осмыслить название "золотого треугольника" или, образно говоря, оценить его пробу в категориях золотого сечения.

Из всего блеска мы видим здесь только разбиение одной его стороны в золотой пропорции. Но это обычное деление одномерного отрезка.

В то время как треугольник – фигура плоская.

Если мы примеряем на треугольник идеологию золотого сечения, то и фигуру следует рассматривать как единую структуру, а не какую-то отдельную выборочную сторону. И в этой структуре должна себя как-то проявлять известная в математике золотая пропорция.

Но ничего подобного мы здесь не находим.

Треугольники ЗС (по Воробьеву) действительно замечательны в своих свойствах.

Но вот в терминологическом аспекте, с их наделением золотоносностью не все очевидно, когда в очередной раз сказывается безудержная имитация мифов [8].

Во всяком случае, воочию проявляется отсутствие преемственной связи при мягкой (непрерывной) трансформации от линейного отрезка с точкой ЗС к плоскому треугольнику путем бесконечно малого вынесения точки ЗС за пределы единичного отрезка.

При переходе от линии к плоскости и наоборот продолжение ЗС следует искать, прежде всего, из условия сохранения плавности такого перехода. – Когда точка ЗС на отрезке становится пределом аналогичной точки треугольника при его сворачивании в одну линию, например, если тупой угол $\to 180^{\circ}$.

Треугольники на рис. 2 этим свойством не обладают, а являются отдельным самостоятельным "золотоносным аттрактором". Если и называть их треугольниками ЗС (по Воробьеву), то обязательно с неким уточняющим определением, например, "треугольник ЗС второго рода", подразумевая, что "треугольник ЗС первого рода" – фигура, непосредственно взаимосвязанная с точкой ЗС на отрезке и из нее вытекающая в предельных переходах [8].

При этом у нас сохраняется преемственность между линией и плоскостью.

Понятно, никто не собирается ревизовать историческое название.

Просто мы хотим отметить его узость и некорректность, когда в угоду пятиугольнику, напичканным золотыми сечениями, треугольник называют также золотым.

З о л о т о й   т р е у г о л ь н и к   в ы с ш е й   п р о б ы . К действительно "золотоносному аттрактору", имеющему более выраженную преемственно-онтологическую связь с ЗС, можно отнести золотой прямоугольный треугольник (ЗПТ), описанный в работе [1] на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 3).

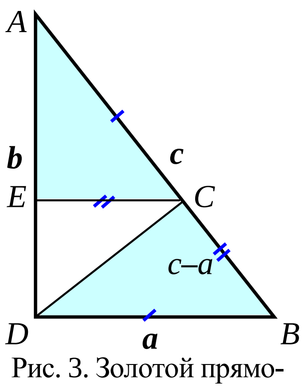

Рис. 3. Золотой прямоугольный треугольник

Тем самым гипотенуза AB делится точкой C в "среднем и крайнем отношении".

Но, пожалуй, самым главным свойством ЗПТ является золотая пропорция его сторон (!)

$$a : b = b : c.$$

Она вытекает из подобия прямоугольных треугольников ABD и ACD. Тем самым больший катет b золотого треугольника является средним пропорциональным между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

Данная пропорция путем перемножения приводится к виду $b^2 = ac$: квадрат большего катета равен произведению меньшего катета на гипотенузу.

Геометрически (по Евклиду) это означает, что прямоугольник, заключенный между гипотенузой и меньшим катетом, равен квадрату на большем катете.

В качестве единичной меры можно принять любой из катетов или гипотенузу ЗПТ (рис. 4) и получить три подобных треугольника.

А из них легко складывается один равнобедренный треугольник.

На наш взгляд, он вполне может также называться золотым.

Угол при основании равен $\alpha = \arcsin\sqrt{\phi} = 0{,}905 \approx 51{,}83^{\circ}$, при вершине $\beta = \arcsin\phi \approx 0{,}666 \approx 38{,}17^{\circ}$.

Треугольник с соотношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ иногда называется треугольником Кеплера [9, с. 80–90].

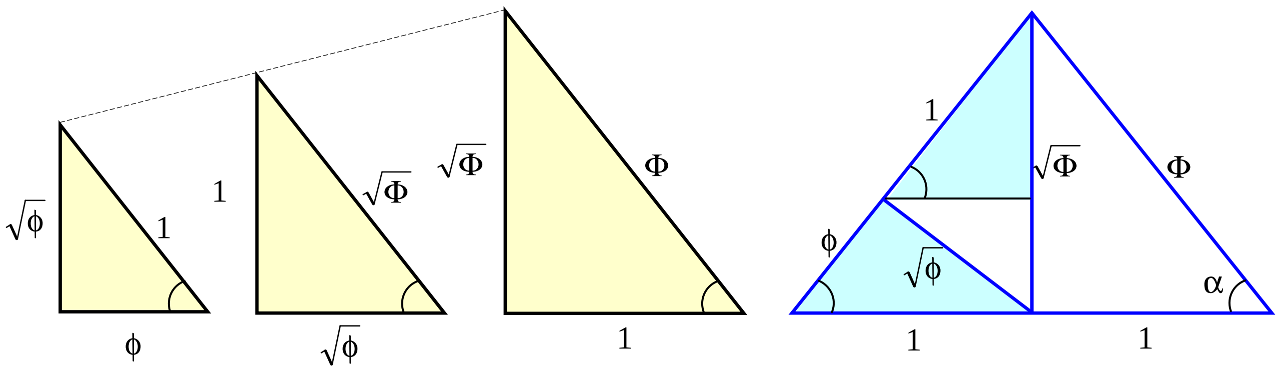

Рис. 4. Золотые прямоугольные треугольники – частный случай гармонических треугольников $a:b=b:c$ или $b^2=ac$

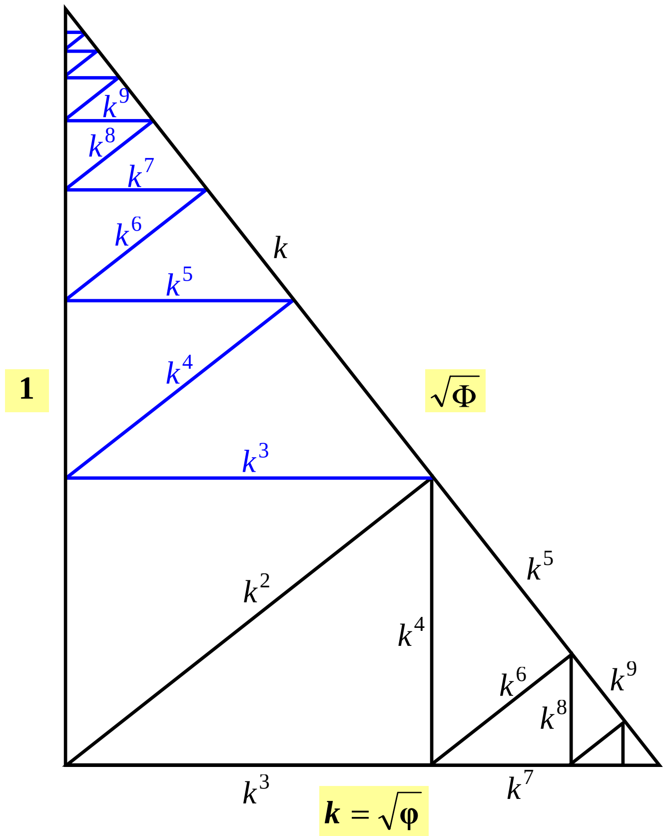

Рис. 5. Фрактальное деление золотого прямоугольного треугольника

Отличительной особенностью золотого прямоугольного треугольника является ярко выраженные фрактальные свойства.

Они легко прослеживаются, если от каждой боковой стороны опускать перпендикуляры на высоту, а из полученной точки обратно – на боковую сторону (рис. 5).

Рассматривая составные суммы отрезков на гипотенузе и основании треугольника (рис. 5) с учетом теоремы Пифагора можно записать такое равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} k^{1+4n}\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} k^{3+4n}\right)^2 = 1.$$

Выполнив несложные преобразования, приходим к известному суммирующему свойству золотой пропорции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{2n+1} = 1.$$

Аналогичным образом отдельно по

катету и гипотенузе можно получить и другие суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{2n-1}=1, \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\phi^{n}=\phi, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\phi^{2n}=\phi.$$

Обратим внимание, что мы ведем речь о золотом треугольнике с углом $\alpha \approx 51{,}83^{\circ}$.

Сам этот угол в специальном термине не нуждается.

Во всяком случае "золотой угол" в математике уже есть.

В геометрии им называется меньший из двух углов, образованных делением окружности в соотношении ЗС: полная окружность так относится к длине большей дуги как она к длине меньшей дуги [10].

Золотой угол определяется по формуле $2\pi\left(1-\Phi^{-1}\right)=2\pi(2-\Phi)=2\pi\Phi^{-2}\approx 137{,}51^{\circ}$.

Но география золотоносных жил на этом не заканчивается.

Она может быть далее расширена на изучение свойств эллипсов.

Золотоносные эллипсы. Периметр эллипса не выражается в элементарных функциях и сводится к эллиптическому интегралу второго рода. Поэтому, условно говоря, золотой угол, у каждого эллипса будет свой. Более того, и в одном эллипсе подобных углов будет счетное множество, поскольку, в отличие от окружности, одинаковые дуги могут соответствовать разным углам.

Значимыми и ликвидными остаются пропорции линейных отрезков. Например, соотношения между осями, фокальным параметром и фокальным расстоянием эллипса.

Похожие попытки уже предпринимались. Они могут быть названы успешными, хотя их описание непоследовательно, а порой и противоречиво.

Так, в одной из работ [11] мы находим довольно необычное утверждение: «Золотой эллипс формируется с помощью двух ромбов, вписанных в эллипс».

Здесь сразу несколько неточностей.

Во-первых, эллипс не может формироваться с помощью ромбов, вписанных в эллипс, которого ... еще нет.

Возможно, какие-то ромбы и получатся потом в процессе или после вычерчивания фигур. Но они являются следствием геометрических построений, а не их базисом.

Именно на это совершенно правильно указывал П. Сергиенко, утверждая, что подобное формирование эллипса алогично [12].

Во-вторых, в эллипс можно вписать только один ромб (!), второй никак не встраивается[1], чтобы все его 4 вершины находились на эллипсе.

Именно так. Поскольку по определению в планиметрии *вписанный четырехугольник* – выпуклый четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности [13].

Получается, что "лошадь-тяжеловоз знаний" ставится (запрягается) даже не позади, а посреди телеги.

Итак, попробуем восстановить картину логическим путем с самого начала.

Как известно [14], основными метрическими характеристиками любого эллипса являются его полуоси (a, b).

По ним эллипс записывается в параметрическом виде: $x=a\cos t,\;\; y=b\sin t,\;\; 0\le t\le 2\pi$.

То же и в полярных координатах $\rho(\varphi)$: $\rho^2=b^2\big/\left(1-e^2\cos^2\varphi\right)$.

---

[1] В любой эллипс можно вписать еще и квадрат (ромб с прямыми углами). Его вершины образуются как точки пересечения с эллипсом двух линий-диагоналей, проведенных через центр под наклоном в 45 и минус 45 градусов.

Форма или вытянутость эллипса характеризуется безразмерным параметром – эксцентриситетом, равным отношению $e = \sqrt{1-k^2}$, $0 \le e < 1$, где $k = b/a$ – коэффициент сжатия или эллиптичность.

Когда e стремится к нулю, эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем величина e ближе к 1, тем он более вытянут. Поэтому вполне естественно "золотистость" эллипса поставить в зависимости от e.

1. Самое простое решение получается, если отношение полуосей (эллиптичность) k положить равным золотому сечению (ЗС), с эксцентриситетом $e = \sqrt{\phi}$ (рис. 6).

$$k = b/a = \phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$$

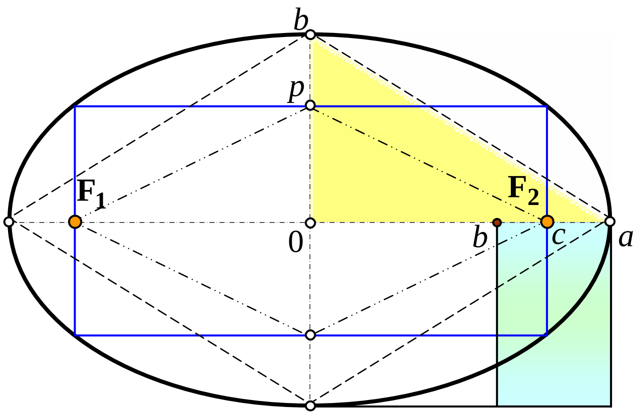

Рис. 6. Золотой эллипс с соотношением осей $k = \phi$

Данное свойство-отношение также порождает "золотоносную геометрию" в виде четырех золотых прямоугольных треугольников (ЗПТ), каждый из которых образуется между двумя соседними вершинами эллипса (точками его пересечения с осями) и центром O.

Действительно гипотенуза $\sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1+\phi^2}$ так относится к большему катету a как он – к меньшему b.

Опишем вокруг эллипса прямоугольник, стороны которого параллельны осям. Или восстановим все 4 ЗПТ до прямоугольников.

Каждый из этих прямоугольников построен по принципу золотого сечения с соотношением сторон $k = \phi$ и обладает одним замечательным свойством.

Отрезав от него квадрат, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон $k = \phi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{a}{b} - 1$. И так до бесконечности.

В образующие прямоугольники вписываются все новые и новые эллипсы (рис. 7)

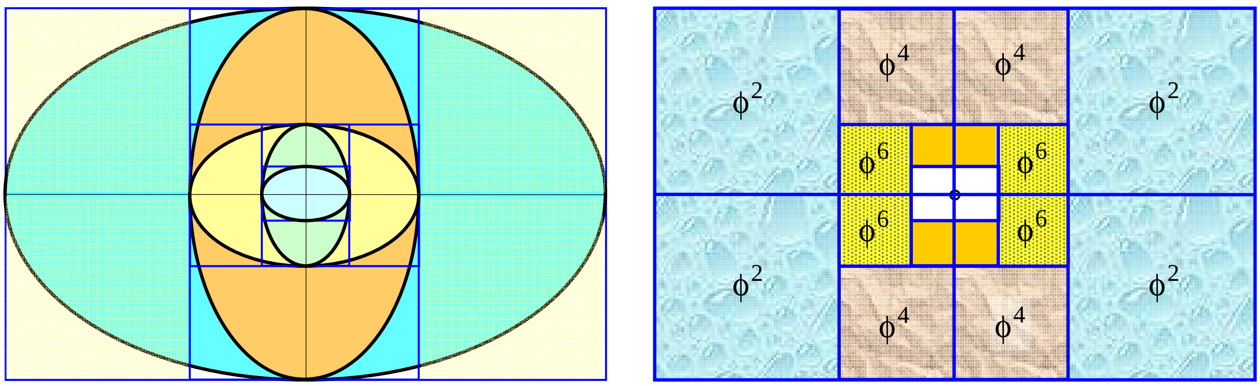

Рис. 7. Русская матрешка золотых эллипсов с соотношением осей $k = \phi$

Площадь эллипса равна $S = \pi ab$, периметр $L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\, dt = 4aE(e)$, где $e = \sqrt{1-k^2}$ – эксцентриситет эллипса, $E(e)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Отсюда следует, что в русской матрешке золотых эллипсов с соотношением осей $k = \phi$ периметры и площади эллипсов образуют геометрические прогрессии со знаменателями соответственно: ϕ и ϕ^2.

Это не единственный золотой эллипс. К тому же, возможно, он не вызывает исключительного доверия в виду некой гармонической незавершенности.

Взять, к примеру, тот же прямоугольник, вписанный в эллипс и проведенный через фокусы F_1 и F_2. Есть непреодолимое желание превратиться его в квадрат.

Проверим эти условия.

2. Приравняв между собой фокальный параметр $p = b^2/a$ и фокальное расстояние $c = ae$, находим $e = k^2 = \sqrt{1-k^2}$, откуда $k = \sqrt{\phi}$ и $e = \phi$.

Положив для определенности большую полуось равной единице $a = 1$, получаем следующее соотношение $e = c = p = \phi$, которое вкупе с чертежом (рис. 8) теперь также имеет все шансы, чтобы его называть золотым эллипсом.

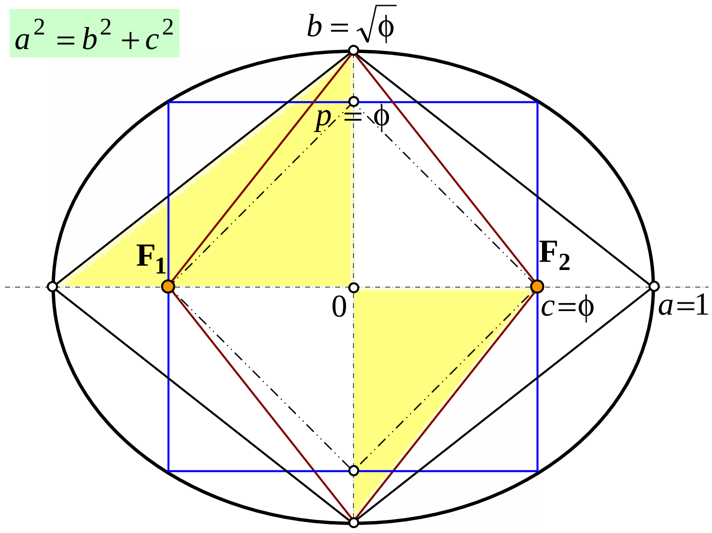

Рис. 8. Золотой эллипс с соотношением полуосей $b/a = \sqrt{\phi}$

Полуоси

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \phi, \quad (a, b) = \left(1, \sqrt{\phi}\right);$$

эксцентриситет

$$e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \phi;$$

фокальный параметр

$$p = b^2/a = \phi;$$

фокальное расстояние

$$c = ae = \phi.$$

Всё красиво, гармонично, пропорционально.

Эксцентриситет e, фокальное расстояние c, фокальный параметр p и квадрат отношения полуосей k^2 равны числу золотого сечения.

Заметим, никаких ромбов или иных дополнительных фигур мы не использовали.

Все основано исключительно на обычных характеристиках самого эллипса.

А построение золотого эллипса получается донельзя элементарным: нужно окружность по одной из осей симметрии (допустим вертикальной) ужать в соотношении $1 : \sqrt{\phi}$.

И вот теперь, когда установлены определяющие соотношения эллипса и выполнены основные построения, можно дополнительно исследовать его свойства.

В частности, по характерным узловым точкам эллипса мы видим 8 золотых прямоугольных треугольников (ЗПТ).

Первые четыре ЗПТ образуются соединением двух соседних вершин эллипса (точек его пересечения с осями) с центром О. Их катеты относятся как $k = a/b = 1/\sqrt{\phi}$.

Следующие четыре ЗПТ формируются соединением вертикальных вершин эллипса с одним из его фокусов и центром. Их катеты относятся как $k = b/c = \sqrt{\phi}/\phi = 1/\sqrt{\phi}$.

Таким образом, характерной особенностью золотого эллипса является (как следствие) наличие в нем восьми ЗПТ, формируемых характерными точками: вершинами, фокусами и центром эллипса.

Кроме того, из равенства $p = c$ следует, что единственный вписанный в эллипс квадрат проходит точно через его фокусы. Но, вернемся к вопросу о ромбах.

Примечательно, что в окружность можно вписать тысячи одинаковых квадратов.

Но при её сжатии вдоль вертикальной оси все они превращаются в параллелограммы.

Поэтому в любом эллипсе присутствует единственный вписанный ромб, вершины которого совпадают с вершинами эллипса.

Можно провести дополнительный, но уже не вписанный ромб: между вершинами на малой оси и фокусами.

Эти ромбы в данном случае оказываются подобными, как и слагающие их ЗПТ (в работе [12] некорректно утверждается обратное), поскольку соотношение катетов или полуосей ромбов равно: $\left(\frac{\sqrt{\phi}}{1} = \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{c}{b} = \frac{\phi}{\sqrt{\phi}}\right)$. Подобие становится наглядным и зрительно, если малый ромб мысленно повернуть вокруг центра на 90 градусов.

Теперь, когда произведены все расчеты и геометрические сравнения, можно вести речь и об альтернативном построении нашего эллипса, отталкиваясь от ромба.

Строим ромб, диагонали которого соотносятся как $\sqrt{\phi}$. Его вершины будут вершинами будущего эллипса. Поворачиваем ромб вокруг центра на 90 градусов и сжимаем по всем направлениям с коэффициентом масштабирования $\sqrt{\phi}$. На горизонтальной оси уменьшенный ромб даст нам фокусы эллипса. Дальше дело техники.

В таком изложении действительно можно вести речь о построении фигуры на основе ромба, диагонали которого форматируют оси эллипса.

Дважды золотой эллипс. Весьма интересной нам представляется задача с вырезанием в золотом эллипсе самоподобного эллипса, уменьшенного в $\Phi = \phi^{-1}$ раз (рис. 9).

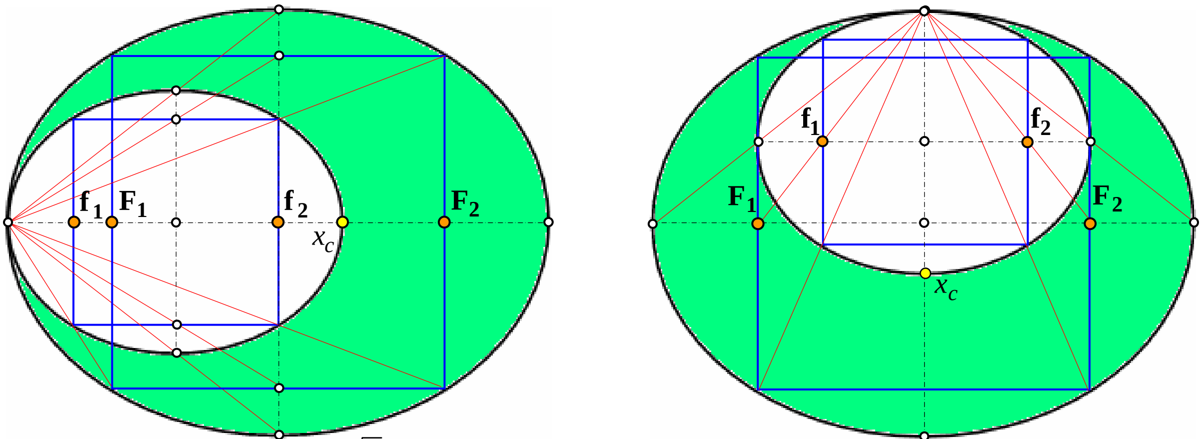

Рис. 9. Золотой эллипс $k = \sqrt{\phi}$ с самоподобными вырезами вдоль малой (а) и большой (б) осей: центр масс x_c фигур – на контуре;

а) фокус f_2 – в центре;

б) большая ось малого эллипса равна расстоянию между фокусами F_1F_2

Образованная плоская фигура имеет геометрический центр точно на своей границе со стороны выреза [15, 16].

Когда вырез выполнен вдоль большой оси (рис. 9, слева), то фокус f_2 малого эллипса располагается точно центре большого эллипса.

Действительно отрезок от левой вершины до фокуса F_2 длиной $(1+\phi)$ после сжатия с коэффициентом подобия ϕ становится равным $(1+\phi)\phi=1$ или большой полуоси большого эллипса, что соответствует центру O.

Вырез можно выполнить и вдоль малой оси эллипса (рис. 9, справа).

В этом случае малый вырезаемый эллипс располагается в точности между двумя фокусами большого эллипса. То есть большая ось второго эллипса равна удвоенному фокальному параметру $2c$.

Проверим свойства аналогичных фигур для самого первого золотого эллипса с коэффициентом сжатия (эллиптичностью) $k=b/a=\phi$ (см. рис. 6).

Здесь также прослеживаются любопытные особенности (рис. 10).

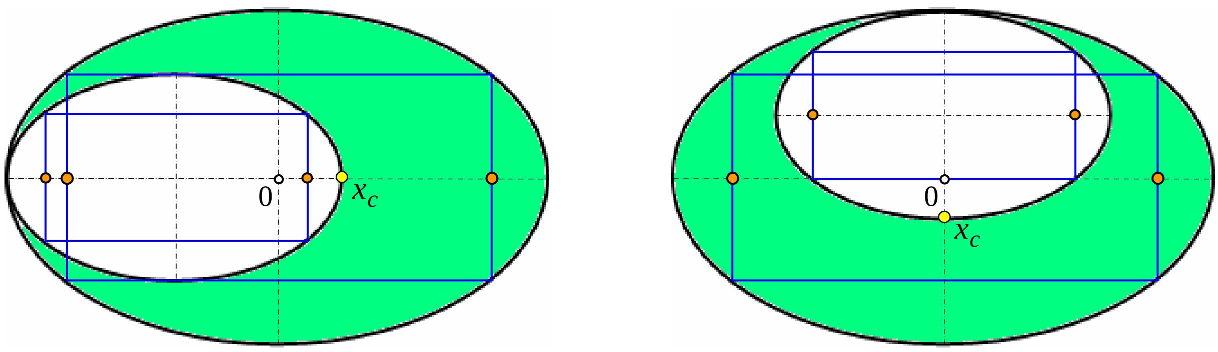

Рис. 10. Золотой эллипсы $k=\phi$ с самоподобными вырезами

В первом случае вырезаемый эллипс своей малой осью расположился в точности между линиями фокального параметра $b\phi = p = b^2 = \phi^2$.

Во втором случае малый эллипс свою нижнюю линию фокального параметра поместил прямо на большой оси большого эллипса.

3. Сравнивая два эллипса (рис. 6 и рис. 8), мы выявляем, что возможен также вариант, когда ромбы, вписанные в эллипс и прямоугольник, проведенный через фокусы, будут иметь равные углы, а их стороны параллельны. Этот случай характеризуется пропорцией:

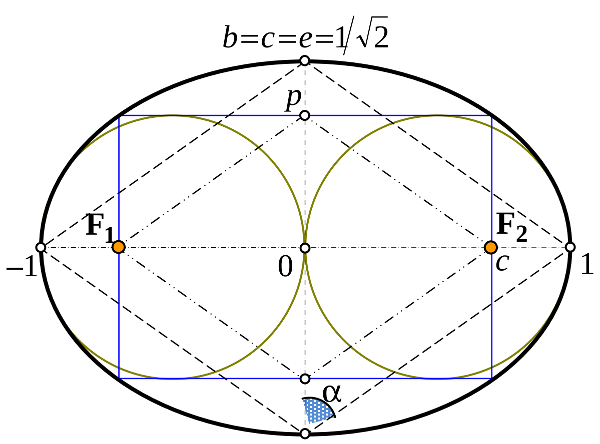

Рис. 11. Эллипс с коэффициентом сжатия (эллиптичностью) $k=1/\sqrt{2}$

$$k=\frac{b}{a}=\frac{p}{c},$$

откуда находим $k=1/\sqrt{2}$.

Положив для определенности $a=1$, получаем значения остальных параметров: $p=1/2$, $b=c=e=1/\sqrt{2}$.

Угол α определяется из прямоугольного треугольника как (рис. 11).

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 54{,}74^\circ.$$

То есть тупой угол между вершинами составляет $2\alpha \approx 109{,}4^\circ$.

Это несколько больше, чем угол 108° треугольника ЗС (см. рис. 2).

Решим обратную задачу и определим параметры эллипса так, чтобы угол $2\alpha = 108^{\circ}$ или $2\sin\alpha = \Phi = \phi^{-1}$. Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, находим $k = \sqrt{4\phi^2 - 1}$.

При таком соотношении k осей эллипса между его вершинами образуется равнобедренный треугольник ЗС с соотношением сторон $1:1:\Phi$.

4. Аналогичным образом в качестве опорной фигуры для эллипса можно выбрать золотой треугольник, образованный его вершиной и фокусами.

В этом случае условие изменится $\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+b^2}} = \sqrt{1-k^2}$, откуда $k = \sqrt{1-\dfrac{\Phi^2}{4}}$.

Параметры четырех типов эллипсов с признаками золотой пропорции сведены в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Параметры эллипсов с наличием признаков золотого сечения

(большая полуось условно принята равной единице $a = 1$)

Параметры эллипсов	Варианты построения эллипсов			
	1	2	3	4
b	$\phi \approx 0{,}618$	$\sqrt{\phi} \approx 0{,}786$	$\sqrt{4\phi^2-1} \approx 0{,}727$	$\sqrt{1-\Phi^2/4} \approx 0{,}588$
$c = e = \sqrt{1-(b/a)^2}$	$\sqrt{\phi} \approx 0{,}786$	$\phi \approx 0{,}618$	$\sqrt{4\phi-2} \approx 0{,}687$	$\Phi/2 \approx 0{,}809$
$p = b^2/a$	$\phi^2 \approx 0{,}382$	$\phi \approx 0{,}618$	$4\phi^2-1 \approx 0{,}528$	$1-\Phi^2/4 \approx 0{,}345$

Сказать что-либо определенное об относительном преимуществе полученных эллипсов нельзя. Они в равной мере могут называться золотыми (рис. 12, для удобства представления фигуры повернуты на 90°).

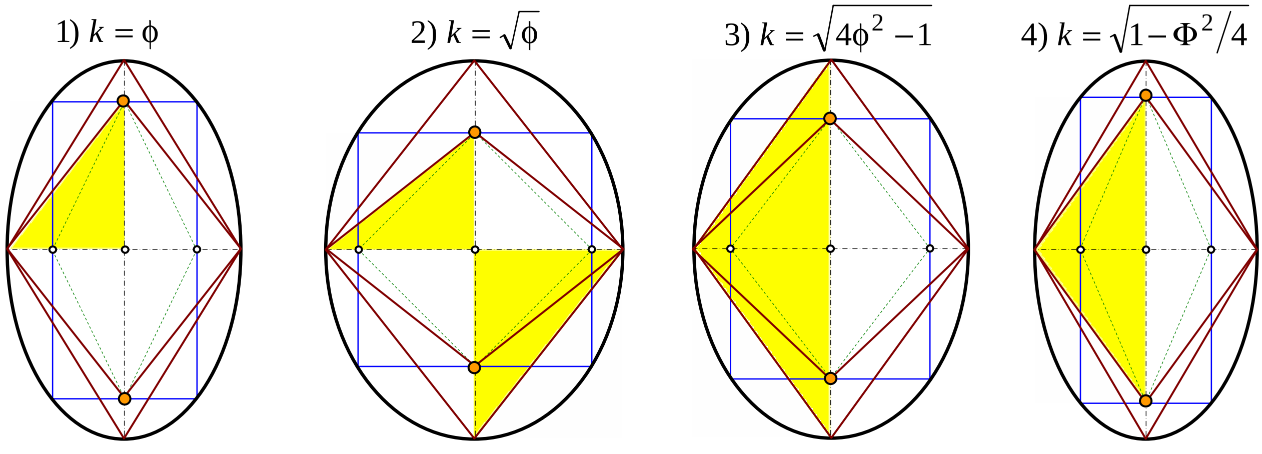

Рис. 12. Золотоносные эллипсы, содержащие золотые треугольники:

1) 4 ЗПТ, образованные вершиной, фокусом и центром эллипса;

2) 4 ЗПТ, образованные вершиной, фокусом и центром эллипса плюс 4 ЗПТ, соединяющие две соседние вершины с центром;

3) 2 золотые треугольника, образованные тремя вершинами;

4) 2 золотые треугольника, образованные вершиной на меньшей оси и фокусами.

Возможно, все-таки второй эллипс является более предпочтительным, поскольку содержит 8 золотых прямоугольных треугольника. А единственный вписанный квадрат проходит через фокусы. Но это дело вкуса.

А вот в цитируемой работе [11] содержится довольно необычные формулировки. «Фигура является исторически первым "золотым" эллипсом, который был *введен* Яном Гречджельским еще в 1986 г. ... *он построил оригинальную геометрическую фигуру, которая является эллипсом* по определению и основана на "золотой пропорции" (курсив наш – *С.В*).

Но что значит введен? Или что означает «Построить оригинальную геометрическую фигуру, которая является эллипсом»?

На наш взгляд, эллипс везде и всегда остается эллипсом независимо от коэффициента сжатия или эллиптичности.

Как-то еще раз, но по-другому, его ввести принципиально уже нельзя, равно как и построить эту действительно своеобразную геометрическую фигуру.

Все уже давно введено и построено.

Но эллипсу можно придать определенную форму путем сжатия или расширения вдоль осей. Это верно. Так же как и то, что он не становится от этого оригинальным.

Частные примечательные случаи, в зависимости от тех или иных характерных свойств, вполне пригодны для их выделения специальными терминами.

Как мы видим, золотоносность в эллипсах наблюдается в самых разных качествах и не является исключительной прерогативой отдельно взятого варианта.

Поэтому речь корректнее вести о некотором множестве золотых эллипсов.

Это и естественно, поскольку, в отличие от отрезка, наш объект является плоской фигурой.

К тому же она описывается кривой второго порядка, а длина дуги не выражается в элементарных функциях и сводится к эллиптическому интегралу второго рода.

Золотые многоугольники. Понятие золотого прямоугольного треугольника, как гармонической геометрической фигуры, может быть расширено на многоугольник, вписанный в окружность.

Предполагается, что все вершины такого многоугольника лежат на одной окружности.

Определение. Вписанный в окружность многоугольник называется золотым, если его стороны соотносятся последовательно как корень квадратный из золотой пропорции $\sqrt{\phi}$.

Пусть $x = a_1$ – условно выбранная первая сторона фигуры.

Тогда остальные по порядку стороны можно сделать равными

$$a_k = a_{k-1}\sqrt{\phi} = x\phi^{\frac{k-1}{2}}.$$

В круге радиусом r центральный угол с хордой a_k равен $\alpha_k = 2\arcsin\frac{a_k}{2r}$.

Многоугольник полностью впишется в окружность, если сумма всех углов α_k будет равна 2π.

Отсюда для золотого n-угольника следует уравнение с одним неизвестным x:

$$\sum_{k=1}^{n}\arcsin\left(\frac{x}{2r}\phi^{\frac{k-1}{2}}\right) = \pi.$$

Численные решения данного уравнения для разного числа углов многоугольника приводит к довольно оригинальным решениям (рис. 13).

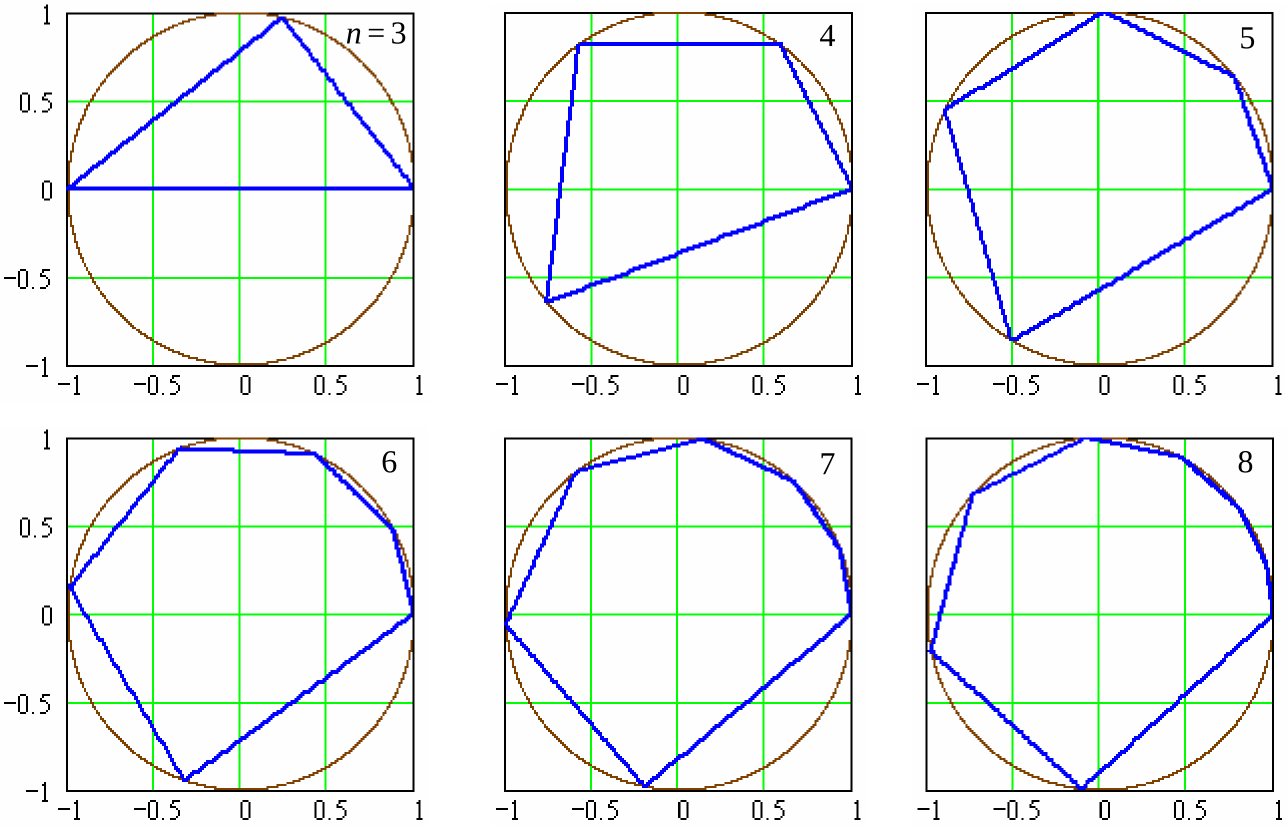

Рис. 13. Золотые n-угольники с соотношением соседних сторон $\sqrt{\phi}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)/2}$

Понятно, что увеличение сторон многоугольников существенно повышает число степеней свободы в процессе формирования разных вариантов золотоносности фигур.

Во-первых, стороны с уже полученными размерами могут чередоваться в произвольном порядке. Количество таких вариантов – чисто комбинаторный вопрос.

Во-вторых, некоторые пары или тройки сторон могут принимать одинаковые размеры.

Так или иначе, но геометрические фигуры, начиная с золотого прямоугольного треугольника, являются непосредственным продолжением линейной задачи построения золотой пропорции. Можно поступить несколько по-иному.

Например, построить гармонические фигуры, стороны которых выстраиваются в одинаковой пропорции. А для определенности первую сторону выбрать с фиксированным размером, в частности, равным диаметру описанной окружности (рис. 13).

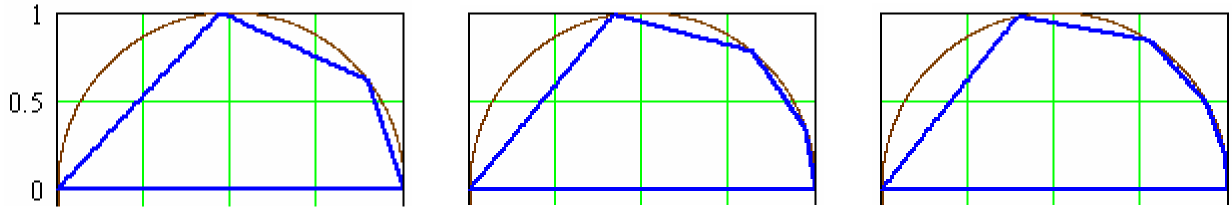

Рис. 14. Вписанные гармонические многоугольники с подосновой на диаметре окружности

В этом случае одинаковость отношения между соседними сторонами сохраняется, но его значение уже отлично от золотой пропорции (табл. 2).

Мы не решали данную задачу аналитически, хотя это представляет определенный интерес, особенно в особых точках, включая поведение параметров при $n \to \infty$.

Так, нам не удалось найти отношение размеров соседних сторон, если самая первая из них равна диаметру описанной окружности.

Таблица 2

**Параметры *n*-угольников,
вписанных в окружность единичного радиуса $r = 1$**

Количество углов	Периметр правильной фигуры	Золотая пропорция		Первая сторона $a_1 = 2r$	
		Первая сторона	Периметр	Отношение сторон	Периметр
n	P	a_1	p	a_{k+1}/a_k	p
3	5.19615	2	4.80837	0.78615	4.80837
4	5.65685	1.87748	5.42601	0.68513	4.95223
5	5.87785	1.73595	5.68008	0.64404	4.99601
6	6	1.62771	5.81468	0.62483	5.01364
7	6.07437	1.54781	5.89463	0.61500	5.02195
8	6.12293	1.48867	5.94569	0.60969	5.02624
9	6.15636	1.44449	5.97999	0.60670	5.02858
10	6.18034	1.41117	6.00390	0.60499	5.02991
∞	6.28319 2π	1.29881	6.07350	?	5.14159 $2+\pi$

Осмыслизмы (вместо заключения). Золотой прямоугольный треугольник... Такой простой и одновременно очень любопытный во всех отношениях объект.

С прекрасной пропорцией. С прямым углом, а значит, и теоремой Пифагора.

Но почему же он тогда не находит распространение в Евклидовой геометрии?

Что помешало ему занять достойное место в трактатах ученых?

Вроде и золотая пропорция налицо.

И если, по словам некоторых золотоискателей XX в., «древние мыслители носили золотое сечение буквально на руках, владея его кодом», как через эти руки проскользнул золотой прямоугольный треугольник?

Ответ, нам представляется, очень простой.

Люди в прошлом довольно быстро научились строить разные правильные фигуры: треугольник, четырехугольник, шестиугольник.

А вот правильный пятиугольник долго не поддавался.

И это не могло не задевать самолюбие античных геометров[2].

Методом проб и ошибок они воссоздавали модель, очень близкую к своему прототипу. Рисовались почти идеальные пятиугольные звезды. Но пока без понятной геометрической интерпретации и выверенного алгоритма. Что называется, наугад или на глазок.

И вот уже в процессе исследования такого приблизительно правильного пятиугольника путем многократных измерений и сопоставлений отрезков были обнаружены особенности соотношений, которые мы сегодня называем золотой пропорцией.

То есть эта задача изначально пришла в виде гипотезы от закономерностей, подмеченных в еще не совсем правильном пятиугольнике.

Она нашла свое строгое геометрическое решение на отрезке.

И опять вернулась уже в виде леммы для строгого построения пятиугольника.

---

[2] Не хуже как в наше время 23 кардинальных проблем Гильберта или 7 задач тысячелетия, за решение каждой из которых институт Клея назначил приз в 1 млн $.

Отсюда и несогласованность, если не сказать разнобой, в различном представлении одного и того же действа в "Началах".

Сначала ЗП дается как задача деления отрезка «в крайнем и среднем отношении».

То есть в том виде, в каком она пришла от правильного пятиугольника.

Затем ЗП дается уже в новой идее: «построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании, вдвое большим остающегося». Сдается, что и сам Евклид, большей частью скомпилировавший уже известные результаты в единую картину-геометрию, не увидел логической связи между этими задачами.

Владел ли Платон кодом ЗП [17]? – Что-то, знал. Но весьма в общих чертах. Что есть некоторый геометрический способ, позволяющий построить правильный пятиугольник, который в свое время долго не поддавался геометрам. Ну и что? – Для него это не было выдающимся философским событием. Никто еще не видел в этой задаче структурирование целого в особом отношении между большим и малым. В противном случае эта тема была бы подхвачена умнейшими древнегреческими философами-математиками на небывалую высоту с одновременным развитием на этой основе общего видения картины мира.

Но, увы. Эта тема никак не затронула выдающиеся умы того времени.

Математическая (числовая) пропорция жила своей жизнью в целочисленных параметрах либо геометрически, без каких-либо связующих линий с феноменом, каким сегодня принято называть золотое сечение. «Отчетливой и сознательно проводимой теории золотой пропорции у Платона нет» [17].

А значит, древние греки её просто пока не замечали.

Наступили на золотой самородок, перешагнули золотую жилу и пошли себе преспокойно дальше. Решать, на их взгляд, более серьезные проблемы, оставив "мелочевку" потомкам в виде упражнений. Впору призадумаешься, и кто же после этого умнее?

Видимо, знать много, еще не значит быть умным...

Да и быть умным в нашей стране последнее время стало не модным. А потому кода...

Выводы.

1. Золотым треугольником предложено считать прямоугольный треугольник в планиметрии с соотношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ как корень квадратный из числа золотой пропорции. Равнобедренные треугольники в пятиконечной звезде тоже содержат золотое сечение. Но они не обладают главным (генетическим) свойством, а именно, не содержат пропорцию между структурообразующими элементами самого треугольника.

2. Приведено несколько альтернативных вариантов построения золотых эллипсов, в основе которых лежат от двух до восьми золотых прямоугольных треугольника.

Определенный интерес представляют "дважды золотые" фигуры, образованные золотым эллипсом с самоподобным вырезом, если коэффициент подобия равен числу золотого сечения. Исходный и вырезаемый эллипсы имеют обусловленные геометрические совмещения, а геометрический центр (центр масс) полученной плоской фигуры располагается точно на ее границе со стороны выреза.

3. В развитие темы золотого треугольника введено новое понятие "золотого многоугольника", стороны которого соотносятся последовательно между собой в отношении

$$\Phi^0 : \Phi^{\frac{1}{2}} : \Phi^1 : \Phi^{\frac{3}{2}} : \Phi^2 ...$$

Получено базовое уравнение для золотого *n*-угольника с одним неизвестным *x* – длиной первой (исходной) стороны, – разрешаемого численными методами.

Развитие данной темы целесообразно продолжить в направлении изучения гармонических многоугольников, вписанных в окружность.

Представляется, что исследователей здесь ждут весьма любопытные результаты.

Литература.

1. *Щетников А.И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. – 2006. – № 3 (38). – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

2. *Начала Евклида*. Книги XI–XV: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.

3. *Алферов С.А.* О 4-х структурной формуле и хозяйстве ЗП // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15302, 21.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322070.htm.

4. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

5. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

6. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

7. *Weisstein E.W.* Golden Triangle // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

8. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: гармонические треугольники // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

9. *Herz-Fischler R.* The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 293 p.

10. *Golden angle* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle.

11. *Стахов А.П.* Еще раз о "золотом" эллипсе Яна Грежджельского // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13659, 14.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321026.htm.

12. *Сергиенко П.Я.* Обзор-4. Сакральная геометрия «золотых сечений» «золотого эллипса» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13638, 09.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00161288.htm.

13. *Словарь* терминов планиметрии // Википедия. Дата обновления: 21.05.2010. http://ru.wikipedia.org/?oldid=24754382.

14. *Эллипс* // Википедия. Дата обновления: 02.08.2010. http://ru.wikipedia.org/?oldid=26663973.

15. *Василенко С.Л.* Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf.

16. *Василенко С.Л.*, *Белянин В.С.*, *Радзюкевич А.В.* Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm.

17. *Белянин В.С.* Владел ли Платон кодом золотой пропорции? Анализ мифа. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/182.