С.Л. Василенко

Новый взгляд на геометрию взаимосвязи золотой пропорции с квадратным уравнением общего вида

Река жизни многих тысячелетий. Решение квадратных уравнений [1, с. 42–46] восходит к заложенной шумерами культуре древнего Двуречья (р. Тигр и р. Евфрат), которая исторически называется вавилонской по имени одного из крупнейших городов этой области.

Человек той эпохи еще не знал отрицательных чисел и естественно рассматривал только положительные корни. В клинописных текстах квадратные уравнения обычно исследовались в форме $ax^2 - bx = c$ или $x^2 - px = q$.

Учение о квадратных уравнениях явилось основой алгебраического исчисления. Кроме того, оно стало прообразом решения в математике многих так называемых обратных задач. В данном случае находились стороны прямоугольника с заданным периметром и площадью.

«Примечательно, что в клинописных текстах впервые появляется, и притом для общего случая, теорема Пифагора», а также всевозможные пифагоровы тройки, многие из которых достаточно сложные, например (3456, 3367, 4825) и др. [1, с. 49–51]. С помощью этой теоремы задолго до Пифагора вавилоняне спокойно вычисляли диагональ квадрата, радиус окружности вокруг равнобедренного треугольника, стягивающий сегмент круга хорды по стреле сегмента и по окружности, площади правильных многоугольников и др.

А пифагорейцы, в угоду мистическим канонам своего союза-мистерии о представлении арифметической теории дробей, наоборот позже засекретили несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной (то есть фактически иррациональность числа √2) [2].

Упоминание об историческом развитии методов решения квадратного уравнения мы находим и в работе [3, с. 320–321], хотя «сам Евклид нигде не пользуется общей формулой решения квадратного уравнения даже в геометрической форме» [3, с. 438].

Но зато подробно рассматривает частный вид уравнения [4] в виде задачи, известной сегодня как золотая пропорция, используемая далее для построения правильного пятиугольника (предложение 4.11) [3, с. 133].

Старая история на новый лад. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение общего вида с единичным коэффициентом при старшей степени $x^2 - px - q = 0$ с его известным решением

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

По поводу записи решения вспоминается музыкальная считалочка радионяни[1], правда для несколько иной записи $x^2 + px + q = 0$ и корней $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$:

p, со знаком взяв обратным, на два мы его разделим, и от корня аккуратно знаком "минус-плюс" отделим.	А под корнем очень кстати половина p в квадрате минус q – и вот решенья, то есть корни уравненья.

Но освободимся немного от привычных стереотипов и, проявив малую толику фантазии, преобразуем подкоренное выражение, записав очевидное тождество:

[1] Радионяня – образовательная программа для младших школьников на радио 70–80-х, которая в шутливой музыкальной форме помогали детям запомнить правила разных предметов.

$$4q = (q+1)^2 - (q-1)^2 .$$

Тогда положительный корень уравнения может быть представлен в виде

$$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 + (q+1)^2 - (q-1)^2}}{2} . \qquad (1)$$

Теперь подкоренное выражение содержит алгебраическую сумму только одних квадратов. Это в несколько ином ракурсе высвечивает нам ещё одну грань уравнения.

Так, преобразование (1) весьма наглядно преподносит нам одну интересную интерпретацию частного решения. При соотношении между коэффициентами $q-1=p$ два слагаемых взаимно сокращаются, и остается только один квадрат $(q+1)^2$, что приводит к высвобождению от радикала и целочисленному решению $\lambda = (p+q+1)/2 = q$.

То есть квадратное уравнение $x^2 - (q-1)x - q = 0$ имеет положительный корень $x = q$.

Оригинальная запись (1) дает нам также ключик-подсказку для весьма любопытной геометрической интерпретации решения квадратного уравнения.

В основу такого решения могут быть положены метрические сопоставления прямоугольников со сторонами p, $q+1$ и $q-1$, а также операция геометрического извлечения квадратного корня. Так мы приходим к новому алгоритму.

***Алгоритм геометрического построения* (*рис.* 1).**

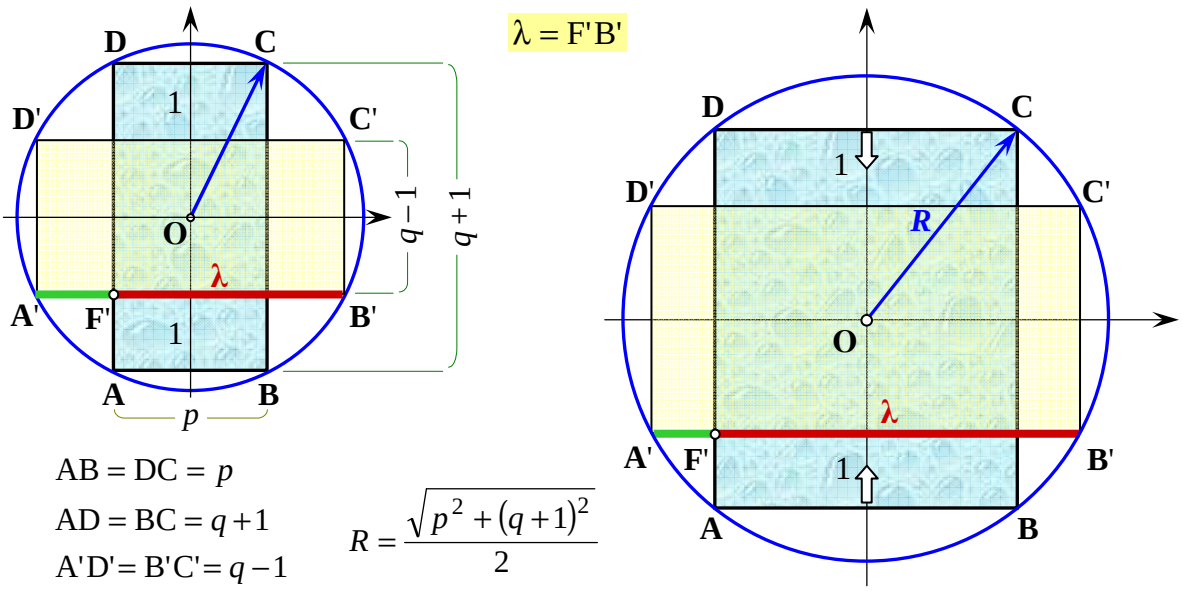
1. Строится прямоугольник ABCD со сторонами p и $q+1$.

2. Из центра O прямоугольника описывается окружность радиусом $R = \mathrm{OC}$, равным половине его диагонали.

3. Исходный прямоугольник сжимается по вертикали с каждой стороны на единичную длину, оставаясь по-прежнему вписанным в окружность, но уже со сторонами p и $q-1$.

4. Расширенное основание нового прямоугольника относительно исходного и будет корнем квадратного уравнения.

То есть на горизонтальной стороне нового прямоугольника вертикальной стороной старого прямоугольника отсекается искомое решение.



$\mathrm{AB} = \mathrm{DC} = p$

$\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = q+1$

$\mathrm{A'D'} = \mathrm{B'C'} = q-1$

$$R = \frac{\sqrt{p^2 + (q+1)^2}}{2}$$

Рис. 1. Геометрическая интерпретация квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$:
а) $p=2$, $q=3$, $\lambda=3$; б) $p=4$, $q=5$, $\lambda=5$;

Как мы видим, геометрические построения очень просты, наглядны и позволяют наглядно проследить механизмы формирования решений в зависимости от исходных значений коэффициентов (параметров) квадратного уравнения (рис. 2).

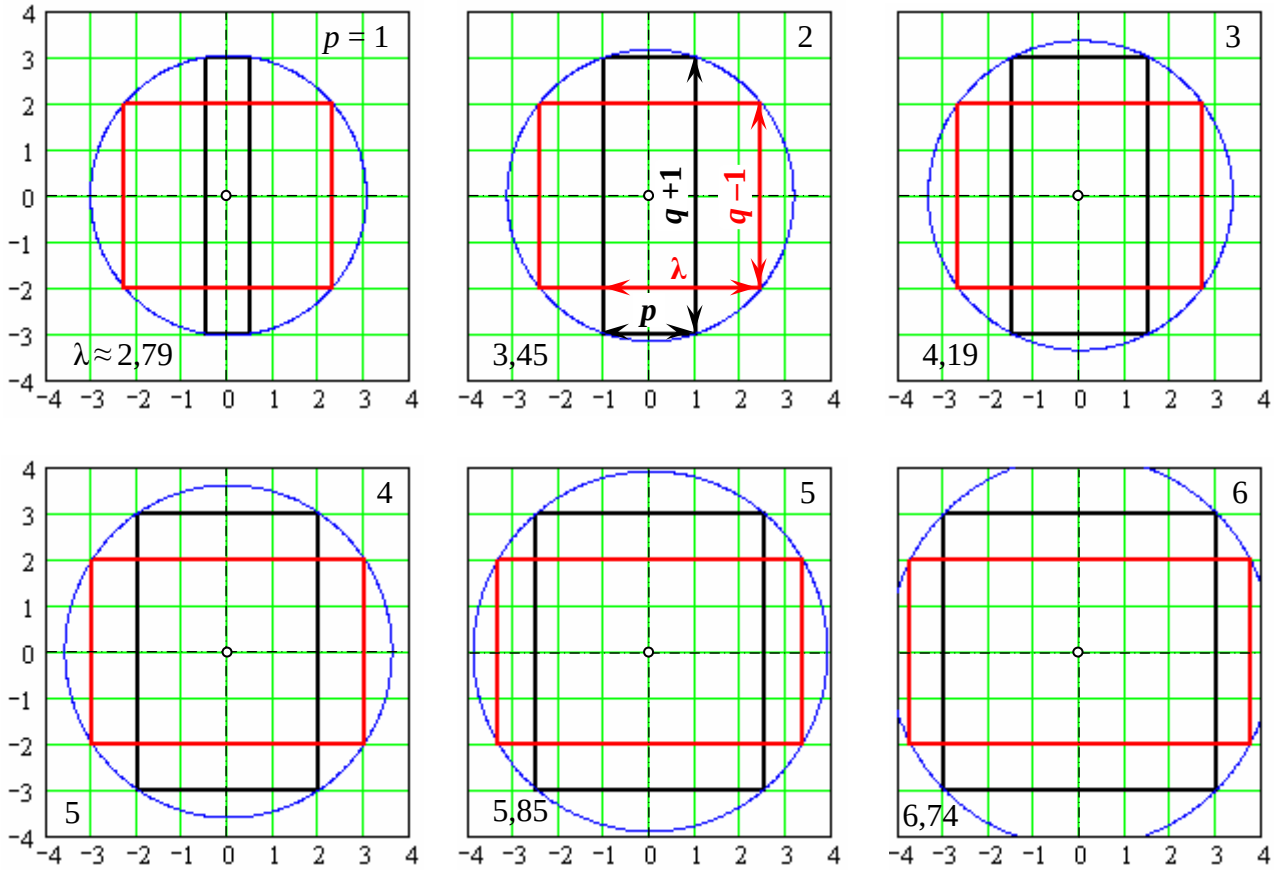
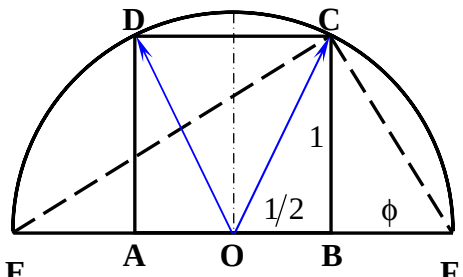


Рис. 2. Геометрическое решение квадратного уравнения $x^2 = px + q$ при $q = 5$

Для единичных коэффициентов уравнения $p = q = 1$ задача вырождается в уравнение золотого сечения (ЗС).

Её решение осуществляется как частный случай описанного алгоритма согласно простой схеме построения (рис. 3 – рис. 4).



$$\frac{CE}{CF} = \frac{BC}{BF} = EB = AF = \Phi$$

$$EF = \sqrt{5} = \Phi + \phi = \Phi + \Phi^{-1}$$

Рис. 3. Числовые параметры ЗС согласно алгоритму Евклида

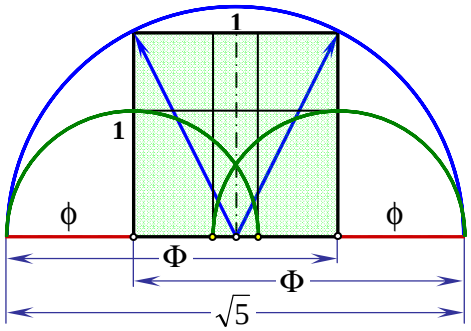


Рис. 4. Абсолютная симметрия построений-решений ЗС, вытекающих из "Начал" Евклида: предложение 2.11

В качестве опорной геометрической фигуры при построениях чаще всего используется квадрат с единичной стороной или адекватная форма в виде прямоугольного треугольника с катетами 1 и 0,5.

Так или иначе, но задача становится той или иной модификацией частного случая согласно общей схеме построения по изложенному алгоритму (см. рис. 1).

Заметим, что общее решение получается даже проще, чем частное у Евклида, – не в смысле кто умнее! А по ходу построений.

На наш взгляд, это еще раз выкристаллизовывает мысль, что в античные времена никакой особой системности в золотой пропорции не было. А основной потенциал сил и заряженность энергии были сосредоточены на построении пентагона и далее правильных многогранников.

Это наглядно демонстрирует и 13 книга, написанная уже не самим Евклидом.

Конечно, изложенный нами метод не является ультрасовременным. Было бы и наивно так предполагать, принимая во внимание более чем 4-тысячелетнюю историю изучения и осмысления квадратного уравнения.

Тем не менее, даже чуть-чуть новое прочтение старого всегда в себе несет элементы свежего информационно насыщенного восприятия не только частностей, но и общей мозаики-картины мироздания, состоящей из гармонизированной структуры такого рода частностей.

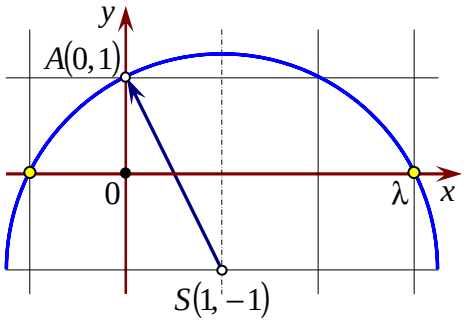


Рис. 5. Графическое решение квадратного уравнения: $p = 2,\ q = 3$

Можно сказать, что изложенный нами метод несколько похож на графическое решение (рис. 5), которое также достаточно простое и весьма эффективное [5]. Да собственно в такой "распаханной веками области" по-другому и быть не должно.

Но все-таки у нас присутствуют чисто геометрические построения, в основе которых лежит модифицированное видоизменение алгебраического решения.

Алгебраическое решение ЗС следует из геометрического построения числа x. И наоборот.

Но может быть получено и путем прибавления $1/4$ к обеим частям уравнения $x^2 - x = 1$.

Тогда выражение в левой части будет полным квадратом двучлена, то есть $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$, откуда после извлечения квадратного корня получаем $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

И еще один важный аспект.

Причинно-следственные отношения в системе «Квадратное уравнение – Золотая пропорция» таковы, что не ЗС распространяет свои свойства на квадратное уравнение, а наоборот все свойства ЗС автоматически следуют из особенностей квадратного уравнения.

Квадратное уравнение существует само по себе как квадратичная модель.

Она никак не обобщает ЗС.

Модель существовала за тысячи лет до того, как ее частный случай в виде ЗС понадобился человеку для построения пентагонов и правильных многогранников.

Об одном наблюдении. В продолжение темы о квадратичной природе пропорции [6] новый метод геометрического решения квадратного уравнения позволяет воочию продемонстрировать и ответить на причины ортодоксального архаизма гиперболических функций Фибоначчи–Люка (ГФЛ) [7], не имеющих своего прототипа при $q > 1$.

Геометрические построения (см. рис. 1) наглядно показывают, что для единичного коэффициента $q = 1$ решение (отрезок λ) остается на горизонтальной оси симметрии или мысленной вещественной числовой оси, независимо от значения другого коэффициента p.

При $q > 1$ решение чисто геометрически «сбивается» дважды. Оно становится ассиметричным относительно вертикально и горизонтальной осей симметрии, переходя в комплексную область плоскости, хотя само решение и остается действительным.

В результате этого функции ГФЛ, которые априори (по определению) должны быть вещественными, сбиваются и перестают работать. И никакие ухищрения не помогают, чтобы их хоть как-то реанимировать, что еще раз свидетельствует об их противоестественном введении, узости и функциональной непригодности в целом.

Так геометрическая интерпретация квадратного уравнения общего вида позволяет вскрыть истинные причины внутренней противоречивости ГФЛ.

Литература.

1. *История математики* с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3-х т. Т. 1 / Под ред. А.П.Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 354 с.

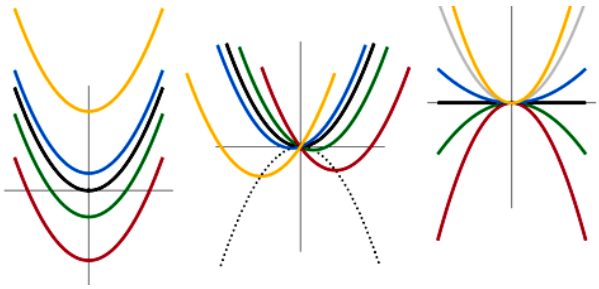
2. *Арнольд В.И.* Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник РАН. – 2002. – Т. 72, № 3. – С. 245–250. – http://www.mccme.ru/edu/indexя.php?ikey=viarn_burbaki.

3. *Начала Евклида*. Книги I-VI // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

4. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

5. *Пресман А.А.* Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки // Квант. – 1972. – № 4. – С. 34–35.

6. *Василенко С.Л.* Квадратичная природа золотой пропорции.

7. *Weisstein E.W.* Fibonacci Hyperbolic Functions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FibonacciHyperbolicFunctions.html.

© ВаСиЛенко, 2010