С.Л. Василенко

Инверсно-числовые аттракторы

Счет – есть игра, а числа в ней – актеры,
где всем давно прописаны их роли ...
ВаСиЛенко

Каждый математический объект по-своему оригинален.

Среди них встречаются и просто любопытные, ближе к развлекательному типу.

Но именно многие из них в последующем стали родоначальниками разных теорий и направлений развития науки.

Среди числовых объектов есть такие, на которых профи, как правило, свое внимание долго не задерживают, или просто обходят стороной.

Любители эзотерических знаний наоборот часто считают их своей вотчиной.

Хотя своим происхождением числовые структуры обязаны обычному арифметическому счету, комбинаторике, свойствам позиционных систем счисления и др.

Действия вполне светские. С явным отсутствием сакрального начала или смысла.

Что касается теологических интерпретаций, вселенской напыщенности или высокопарности самих числовых величин, то это дело сугубо индивидуальное. Здесь даже официальная наука не всегда едина в своем мнении. Поэтому спорные вопросы больше соотносятся с такой категорией как вера, включая и верования в догматы самой науки, независимо от ее названия или прилагательного к ней.

Несмотря на кажущуюся простоту и понятливость в использовании чисел, здесь не все так просто и безоблачно. Достаточно вспомнить и проследить историю тех же мнимых, иррациональных или трансцендентных чисел.

Многие удивятся, но обычная единица (счетная палочка) до сих пор не имеет единого, доходчивого и однозначного аксиоматически-математического определения или описания.

Так, полное имя математического термина, обозначаемого символом "1", группа французских математиков (Бурбаки) дает через запись-сочетание несколько десятков тысяч логических и специальных знаков [1, с. 188].

Разрешите представить... Что же представляет собой изучаемые нами далее объекты?

В определенной мере они связаны с именем индийского математика Капрекара.

Более всего он известен за пределами Индии своим открытием, совершенным 55 лет назад [2] и вошедшим в теорию чисел как "постоянная Капрекара" [3].

Для наглядного восприятия позволим себе озвучить некоторые известные положения, которые можно найти в литературе по данному вопросу. Кстати, сравнительно малочисленной. Хотя время от времени интерес перманентно возобновляется [4–16].

В десятичной системе счисления выберем любое четырехзначное число $x \geq 1000$, в котором не все цифры одинаковые. Расположим цифры сначала в порядке убывания, затем обратно в порядке возрастания. Найдем разность полученных чисел, вычтя из первого числа второе. В процессе перестановки цифр и вычитания нули сохраняются.

Данную совокупность действий назовем функцией Капрекара $K(x)$.

Повторяя этот процесс с получающимися разностями, не более чем за семь шагов получим число 6174, которое будет затем воспроизводить само себя. Например, для величины 3412: $4321 - 1234 = 3087 \rightarrow 8730 - 378 = 8352 \rightarrow 8532 - 2358 = 6174$.

Среди трехзначных чисел аналогичным свойством обладает 495 (процедура сходится к нему максимум через шесть итераций для любого 3-значного числа без повторяющихся цифр). Для чисел с большим, чем 4 знака, подобное преобразование рано или поздно приводит к циклическим повторениям чисел либо к неподвижной точке $n = K(n)$.

Для 5-значных чисел неподвижной точки не существует.

Имеется два шестизначных числа, являющихся неподвижными точками преобразования Капрекара (549945 и 631764). Семизначных чисел с таким свойством нет.

8-значные: 97508421, 63317664.

9-значные: 864197532, 554999445.

10-значные: 9753086421, 6333176664, 9975084201 и т.д.

Последовательности точек-аттракторов (A099009) и чисел, образующих циклы (A099010) по схеме Капрекара, можно найти в числовой энциклопедии [17] и работе [18].

Например, легко доказать непосредственной проверкой, что любое число вида $\underline{6}33\ldots33\underline{17}66\ldots66\underline{4}$ (где в последовательностях количество цифр 6 и 3 одинаково) является неподвижной точкой $n = K(n)$. Сама постоянная Капрекара тоже является числом этого вида. Однако не любая неподвижная точка может быть записана в таком виде.

Это довольно интересная тема. Хотя манипуляции с перестановками, вычитаниями и другими действиями над представлениями чисел обычно зависят от системы счисления.

В этом контексте данное свойство в преобразовании чисел носит дуальный характер.

С одной стороны, оно является некоторым инвариантом относительно произвольных систем счисления в том смысле, что инверсно-числовые аттракторы (ИЧА) практически всегда присутствуют. С другой стороны, их конкретные значения изменяются при переходе от одной системы счисления к другой.

Есть и другие 4-значные числа-анаграммы несколько иного типа (A160851 [17]):

$$1089 = 9108 - 8019; \quad 1269 = 2961 - 1692; \quad 2538 = 5823 - 3285.$$

Главная задача настоящего исследования: найти аналитические представления закономерностей формирования ИЧА.

Терминологический окрас. По логике образования чисел каждое из них можно считать константой. В этом смысле выделение из них отдельных представителей с приданием им терминологического смысла константы выглядит странным и слабо аргументированным. Особенно это касается семейства чисел с определенными свойствами.

На наш взгляд, более приемлемым следует считать использование термина "аттрактор", в частности его арифметических аналогов [19].

Что касается прямого и обратного чтения чисел, то целесообразно вести речь об инверсивных (инверсных[1]) числах.

Так, в математической логике инверсия (логическое отрицание как присоединение к высказыванию частицы «не») – логическая функция с простой таблицей истинности: инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.

При этом двойное отрицание возвращает к исходному состоянию.

В общем числовом пространстве можно говорить об инверсивной семантике или обратном чтении и вообще об инверсно-числовых аттракторах, которые в частном случае ($m = 4$) превращаются в константу Капрекара для четырехзначных чисел в десятичной системе счисления.

Кстати постоянной Крапекара иногда называют [20] и другую величину – 145.

Для исходного натурального числа она образуется в результате повторения операции по суммированию квадратов цифр. Например, для 166:

$1^2+6^2+5^2 = 62 \rightarrow 6^2+2^2 = 40 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 1^2+6^2 = 37 \rightarrow 3^2+7^2 = 58 \rightarrow 5^2+8^2 = 89 \rightarrow 8^2+9^2 = 145.$

Если процесс не приведет к единице, то получим число 145 , после которого появляется цикл: 145→42→20→4→16→37→58→89.

---

[1] Инверсия (лат. *inversio* перестановка, переворачивание) – расположение элементов в обратном порядке // Словарь Ожегова. – http://www.edudic.ru/oje/15663.

Обозначения. С учетом принятой терминологии введем некоторые обозначения:

$K = \delta_n ... \delta_0 \equiv \overline{\delta_n ... \delta_0}$ – инверсно-числовой аттрактор, черта отмечает число, состоящее из цифр;

$\{\delta_n ... \delta_0\} = \{\delta\}$ – совокупность (множество) цифр, составляющих число в позиционной системе счисления;

$R(x) = R(x_n ... x_0) = x_0 ... x_n$ – инверсная функция числа x: $R(R(x)) = x$;

$S(x) = \alpha_n ... \alpha_0 \equiv \overline{\alpha_n ... \alpha_0}$ – число, составленное из отсортированных цифр числа x так, что $\{\alpha_n ... \alpha_0\} = \{x_n ... x_0\}$ и $\alpha_n \geq ... \geq \alpha_0$.

Два натуральных числа x и x', содержащие $m = n + 1$ цифр (знаков) α_j, $j = \overline{0, n}$, назовем сопряжено-инверсными или позиционно-обратимыми, если

$$x = \alpha_n ... \alpha_0, \qquad x' = \alpha_0 ... \alpha_n .$$

Теоретические обобщения.

Определение. Инверсно-числовой аттрактор – положительная разность сопряжено-инверсных чисел, которая не изменяет множество составляющих их цифр (знаков)

$$\{x - x'\} = \{x\} = \{x'\}.$$

Назвать это константами Капрекара не корректно по целому ряду причин:

– даже для неизменного количества цифр $n = \text{const}$ подобных чисел много;
– константой Капрекара уже названо число 6174 для $m = n - 1 = 4$.
– назвать числами Капрекара нельзя, – есть такое понятие для иного класса чисел;
– мы оставляем память об авторе идеи и вносим обозначение K-аттрактора.

Схема нахождения аттракторов довольно проста.

Формируем массив цифр $\{x\} = \{x_n ... x_0\}$, отсортированных в порядке убывания.

Вычисляем разность $\Delta(x) = x - x'$.

Проверяем эту разность на K-аттрактор: $S(\Delta(x)) = S(x)$.

Применительно к многозначным числам такая процедура обычно приводит к двум вариантам: либо выходит на соответствующий аттрактор, либо попадает на циклический процесс с некоторым фиксированным периодом T (рис. 1).

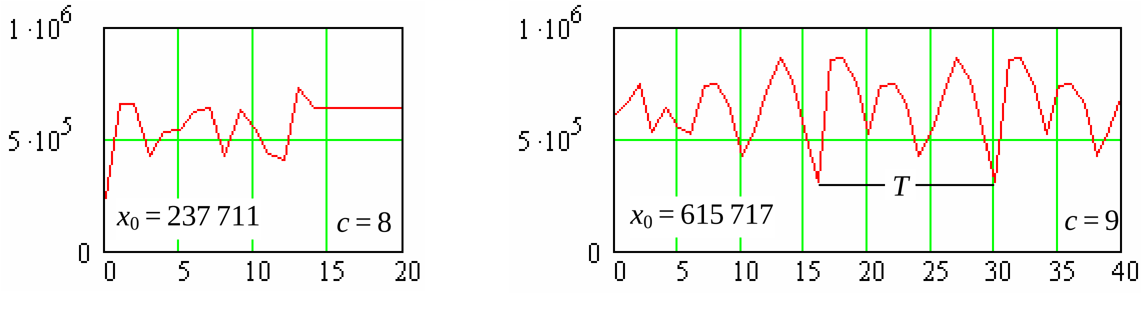

Рис. 1. Типичные формы изменения функции Капрекара $K(x)$

В позиционной системе значение каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число.

Основание позиционной системы счисления – это количество различных знаков (цифр, символов), используемых для изображения чисел в данной системе. Оно определяет, во сколько раз различаются значения цифр соседних разрядов числа.

Теорема 1. *Разность двух инверсных чисел делится без остатка на основание позиционной системы счисления, уменьшенное на единицу.*

Запишем и преобразуем разность двух позиционно-обратимых натуральных чисел в системе счисления с основанием c

$$\Delta = x - x' = \alpha_n ... \alpha_0 - \alpha_0 ... \alpha_n = c^n \alpha_n + c^{n-1}\alpha_{n-1} + ... + \alpha_0 - c^n \alpha_0 - c^{n-1}\alpha_1 - ... - \alpha_n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n'} d_j \left(c^{n-j} - c^j\right) = \sum_{j=0}^{n'} d_j c^j \left(c^{n-2j} - 1\right) = (c-1)\sum_{j=0}^{n'} d_j \sum_{k=0}^{n-2j-1} c^{j+k} ,$$

где $d_j = \alpha_{n-j} - \alpha_j$, $n' = \lceil n/2 \rceil$, $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Таким образом, исходная разность чисел содержит одним из своих сомножителей величину $c' = c - 1$, то есть $\Delta = 0 \ (\mathrm{mod}\ c')$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Разность двух инверсных чисел нечетной размерности делится без остатка на квадрат основания позиционной системы счисления, уменьшенный на единицу.*

Чтобы как-то отличать запись от произведения сомножителей, используем обозначение (под одну черту) $\overline{x(y)_k...z}$ числа, записанного с помощью цифр $\{x(y)_k...z\}$, где нижний индекс означает повторение содержимого скобок k раз. Например, $\overline{12(34)_2 5} = 1234345$.

Учитывая, что при нечетной размерности взятие разности двух инверсных чисел сопровождается обнулением средней цифры, получаем:

$$\Delta = x - x' = \sum_{j=0}^{n'-1} c^j d_j \overline{(c-1)_{n-2j}} = \overline{(c-1)_2} \sum_{j=0}^{n'-1} c^j d_j \overline{(c)_{n'-1-j} 1} .$$

Так, в десятичной системе счисления число $\overline{(c-1)_2} = 99 = 9 \cdot 11 = (10-1)(10+1) = \left(10^2 - 1\right)$.

В общем виде разность Δ содержит сомножитель $\overline{(c-1)_2} = \left(c^2 - 1\right)$, что и требовалось доказать.

Пример: $a_6 a_5 ... a_0 - a_0 ... a_5 a_6 = 99[10101 \cdot 1(a_6 - a_0) + 101 \cdot 10(a_5 - a_1) + 1 \cdot 100(a_4 - a_2)]$.

Следствие 1. В десятичной системе счисления разность натурального числа и зеркального к нему кратна 9.

Следствие 2. Инверсное вычитание *K*-аттракторов не изменяет состав цифр, а только их последовательность.

Другими словами, подобное вычитание изменяет в записи числа только последовательность цифр, сохраняя их перечень (набор).

Исходя из данного следствия, нам вполне достаточно оперировать составом цифровых знаков, из которого легко образуются *K*-аттракторы практически любой сложности и конструкции.

Обозначим через $\mathrm{N}(x) = x'$ операнд теософской редукции (сложения), где $0 < x' \leq 9$ – натуральное число (цифра), – преобразование исходного числа путем сложения всех его цифр до последнего, минимально возможного значения, пока не получится одна итоговая цифра [21].

Следствие. *Теософская редукция разности двух позиционно-обратимых натуральных чисел равна последней цифре* (*знаку*) *позиционной системы счисления.*

В общем случае для последней цифры (знака) $c' = c - 1$ в позиционной системе счисления с основанием c верно соотношение [21] $\mathrm{N}(c' \cdot \alpha) = c'$.

Отсюда с учетом теоремы 1 следует $\mathrm{N}(\Delta) = \mathrm{N}(c' \cdot \alpha) = c' = c - 1$.

Таким образом, мы приходим к важному методологическому результату:

1. Существуют свойства, которые зависят от систем счисления и порождаются ими.
2. Существуют свойства общего вида, не зависящие от систем счисления. Это наиболее фундаментальные характеристики чисел.

Формирование аттрактора 6174. Согласно последнему следствию на первом же шаге преобразования Крапекара образуется число $n = 0 \pmod 9$, которое делится на 9 без остатка.

Это свойство отражается потом на протяжении всего движения чисел.

То есть, какое бы начальное число не было выбрано, сразу или буквально после первой операции оно попадает в некоторое ограниченное множество цифровых структур (рис. 2).

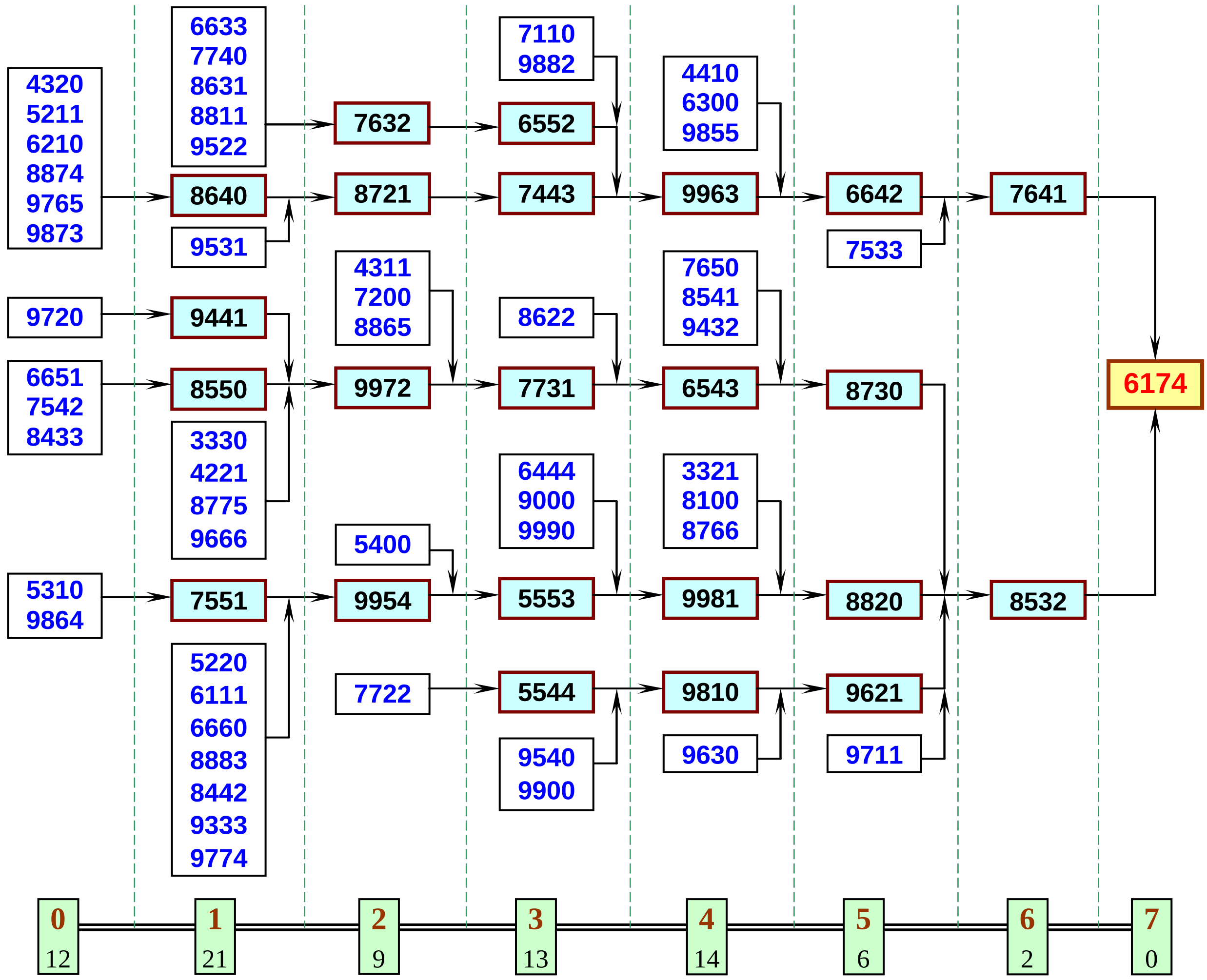

Рис. 2. Схема "движения" 77 базовых четырехзначных цифровых форм $n = 0 \pmod 9)$
к аттрактору Капрекара 6174 максимум за 7 шагов

Похожую схему можно найти в работе [22], однако она не охватывает все возможные числовые образования, и потому не может служить полным доказательством существования единственного аттрактора.

Для четырехзначных чисел таких цифро-структур всего 24 (вместе с самим числом 6174). После первой итерации любое приемлемое число сразу попадает в это множество (рис. 3, табл. 1).

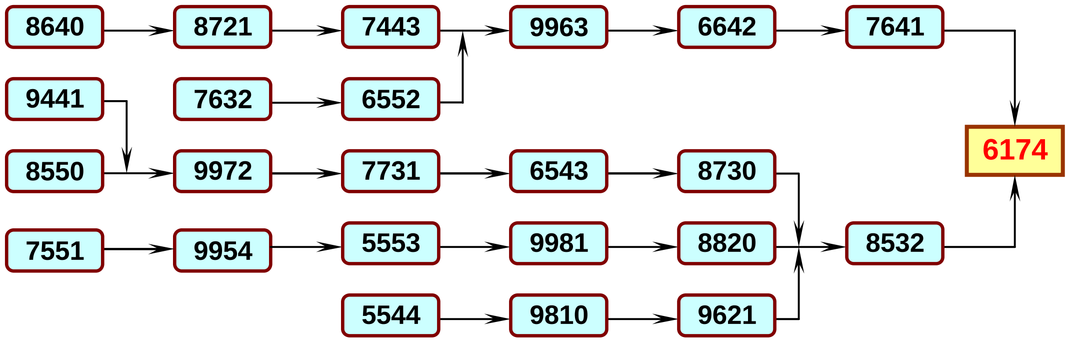

Рис. 3. Множество четырехзначных чисел $n = 0 \pmod 9$ в количестве 24 шт., к которым преобразуются все другие числа: сразу же или после начального шага

Таким образом, уже самое первое вычитание (преобразование) переводит систему во множество чисел $n = 0 \pmod 9$. И далее из этого круга не выходим.

Понятно, что таковым является каждое 9-е число. Этим самым почти на порядок уменьшается область допустимых значений.

Более того, далеко не все числа $n = 0 \pmod 9$ имеют своих предшественников.

То есть не каждое число с делителем 9 может образовываться в результате вычисления разности двух инверсных чисел.

Всего имеем 79–2=77 чисел, за вычетом 3222 и 7776.

Первыми предшественниками $K = 6174$ являются только два числа: одно состоит из самих цифр 7641, второе из их дополнений до 9, то есть 8532.

В противном случае аттрактор просто не образуется.

Таблица 1

Базовые четырехзначные числа (в порядке возрастания)

1	3321	**11**	5544	**21**	6651	**31**	7650	**41**	8622	**51**	8874	**61**	9630	**71**	9882
2	3330	**12**	5553	**22**	6660	**32**	7722	**42**	8631	**52**	8883	**62**	9666	**72**	9900
3	4221	**13**	6111	**23**	7110	**33**	7731	**43**	8640	**53**	9000	**63**	9711	**73**	9954
4	4311	**14**	6210	**24**	7200	**34**	7740	**44**	8721	**54**	9333	**64**	9720	**74**	9963
5	4320	**15**	6300	**25**	7443	**35**	8100	**45**	8730	**55**	9432	**65**	9765	**75**	9972
6	4410	**16**	6444	**26**	7533	**36**	8433	**46**	8766	**56**	9441	**66**	9774	**76**	9981
7	5211	**17**	6543	**27**	7542	**37**	8442	**47**	8775	**57**	9522	**67**	9810	**77**	9990
8	5220	**18**	6552	**28**	7551	**38**	8532	**48**	8811	**58**	9531	**68**	9855		
9	5310	**19**	6633	**29**	7632	**39**	8541	**49**	8820	**59**	9540	**69**	9864		
10	5400	**20**	6642	**30**	7641	**40**	8550	**50**	8865	**60**	9621	**70**	9873		

На каждом этапе де-факто изменяются 3–4 цифры.

Предполагается, что все цифры не одинаковы, поскольку первая же разность приведет к нулю. Целесообразно также отсечь числа, у которых три цифры одинаковы, а четвертая – на 1 больше или меньше (3222, 7776, 2111 и т.п.), поскольку алгоритмическая операция в этом случае приводит к числу 999, что фактически выводит нашу систему из четырехзначного представления. Можно, конечно оставить это число, предполагая его равным 0999 с обратной записью 9990, но суть от этого не меняется, поскольку число 9990, так или иначе, но присутствует среди базовых чисел.

В целом цифры удовлетворяют соотношениям $a \ge b \ge c \ge d$, $a > 0$, $d < 9$ и в процессе своего движения подчиняются аналитическим формулам (рис. 4).

$b > c$

$D = 10 + d - a,$
$C = 9 + c - b,$
$B = b - c - 1,$
$A = a - d;$

$A + B + C + D = 18$

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ -\ \underline{d\,c\,b\,a} \\ ABCD \end{array}$$

$b = c$

$D = 10 + d - a,$
$C = 9,$
$B = 9,$
$A = a - d - 1;$

$A + B + C + D = 27$

Рис. 4. Аналитико-схематичное представление вычитания позиционно-обратимых (зеркальных) натуральных чисел

А вот у пятизначных чисел аттрактор не образуется. – В этом, конечно, можно убедиться простым перебором всех чисел, хотя математически не представительно.

Докажем теорему.

Т е о р е м а 3. *В* 10-*тичной системе пятизначные числа не имеют К-аттрактор.*

$\Delta = b - d > 0$

$$\begin{array}{l} 9\,b\,c\,d\,e \\ \underline{e\,d\,c\,b\,9} \\ A\,B\,9\,D\,E \end{array} \qquad \begin{array}{l} A = 9 - e \\ B = \Delta - 1 \\ C = 9 \\ D = 9 - \Delta \\ E = e + 1 \end{array}$$

8

10

Рассмотрим разность двух чисел $abcde - edcba = ABCDE$.

Цифры a, b, c, d, e расположены в порядке не возрастания.

Для аттрактора разность $ABCDE$ содержит тот же набор цифр как «командное равенство» $\{abcde\} = \{ABCDE\}$.

Симметричные относительно центра цифры $b > d$.

В противном случае, если $b = d = c$, то $B = C = D$, и во всех трех числах должны появиться эти девятки, что дает: $a = b = c = d = 9$.

Тогда A или E тоже равно 9, а другая цифра равна 10 – 9 = 1, что невыполнимо.

Значит, действительно $b > d$.

Разность $\Delta = b - d$ может принимать 5 значений, что приводит к весьма ограниченной совокупности пятизначных чисел (упорядоченных наборов цифр), претендующих на *К*-аттракторы (табл. 2).

Таблица 2

Формирование множества пятизначных чисел, претендующих на *К*-аттрактор

$\Delta = b - d$	B	D	e	A	$E = 10 - A$	Числа-кандидаты на *К*-аттрактор				
1	0	8	0	9	1	99810				
2	1	7	$0 \div 1$	$9 \div 8$	$1 \div 2$	99711	98721			
3	2	6	$0 \div 2$	$9 \div 7$	$1 \div 3$	99621	98622	97632		
4	3	5	$0 \div 3$	$9 \div 6$	$1 \div 4$	99531	98832	97533	96843	
5	4	4	$0 \div 4$	$9 \div 5$	$1 \div 5$	99441	98442	97443	96444	95544

Обычная проверка показывает, что ни одно из них не является *К*-аттрактором.

Этот же результат следует из теоремы 2, так как возможные числа-кандидаты не делятся на 99. Отсюда следует, что *К*-аттрактора просто нет, что и требовалось доказать.

Подобным образом доказывается отсутствие аттрактора у 7-значных чисел.

А происходит это из-за обязательного наличия девятки (при вычитании средней цифры из самой себя), что несколько сужает степень свободы.

Но уже для 9-значных чисел такая ситуация не становится непреодолимой преградой и приводит к существованию неподвижных числовых точек.

Аналитика произвольных аттракторов. Анализ показал, что аттракторы весьма удобно и обусловлено выражать не в конечном виде, а путем фиксации "корневых" свойств. Этим самым значительно сокращается их запись, как для отдельных чисел, так и всей совокупности.

Приведем некоторые примеры

1. Число 495 далее повторяется следующим образом при $m = 0(\mathrm{mod}\ 3)$

$$9_i5_i4_i - 4_i5_i9_i = 5_{i-1}49_i4_{i-1}5, \quad i = m/3.$$

2. Число 6174 становится опорной точкой бесконечного множества аттракторов вида

$$63_{i-1}176_{i-1}4, \quad i = (m-4)/2.$$

3. Аттрактор 97508421 для восьмизначных чисел, в свою очередь порождает для четных $m \geq 6$ целое семейство констант сразу в двух измерениях

$$9_{i+1}753_i086_i420_i1, \quad i = 0..(m-6)/2.$$

Одним из примечательных аттракторов в этом множестве является число, в котором каждая цифра присутствует ровно один раз,

$$9753086421 = 9876543210 - 0123456789.$$

4. Подобный аттрактор, в котором каждая цифра, кроме нуля, присутствует ровно один раз, для девятизначных чисел равен

$$864197532 = 987654321 - 123456789.$$

В свою очередь, он порождает для нечетных $m \geq 9$ целое семейство констант

$$864(3)_j197(6)_j532, \quad j = 0..(m-9)/2.$$

5. $8_i6_i4_i2_{i-1}19_i7_i5_i3_i1_{i-1}2 = (987654321)_i - (123456789)_i$.

Описать всевозможные инверсные числовые аттракторы довольно сложно. Да и вообще весьма проблематично. Кроме того, полезность такого деяния в совокупности с огромным множеством разноплановых решений становится под сомнением.

Тем не менее, вопрос разрешим. И сравнительно легко.

Нужно только изменить направление самого поиска или угол зрения в анализе данных. А именно, попытаться искать стандартные составы цифр, которые в результате применения функции Капрекара дают искомые аттракторы $\{K(x)\} = \{x\}$. То есть записывать следует не готовые решения, а наборы знаков, которые эти решения порождают.

Таким образом, обобщая и структурируя похожие числовые образования, выходим на множества K-аттракторов.

Ограничимся их аналитическим представлением для трех систем счисления.

Десятеричная система счисления ($c = 10$):

$$\begin{array}{lll}
m = 3i: & (495)_i; & \\
m = 4 + 2k: & 6174(63)_k; & \\
m = 2(3i + j + k) + t: & (875421)_i(90)_j(63)_k(9)_t, & 0 \leq t \leq \min(i-1, k); \\
m = 9i + 2k + t: & (987654321)_i(63)_k(0)_t, & 0 \leq t \leq i; \\
m = 9i + 2k + 2j + t: & (987654321)_i(90)_l(63)_k(0)_t, & 1 \leq t \leq i; \\
m = i(9p + 14d): & (81)_{u_0}(63)_{u_1}(495)_{u_2}(73)_{u_3}, & u_s = i(p + ds), \quad s = \overline{0, 3};
\end{array}$$

$(i, j, p, d) \geq 1$ – натуральные (положительные) числа; $k, l \geq 0$.

Девятеричная система счисления ($c = 9$):

$$m = 3i + 2k: \qquad (853)_i(62)_k;$$

$m = 15i + 2j$: $(8)_i(7654321)_{2i}(80)_j$;

$m = 9i$: $(87621)_i(53)_{2i}$;

$m = 5i + 4k$: $(862)_i(71)_k(71)_{i+k}$;

$i, j \geq 1, \quad 1 \leq k \leq i$.

Восьмеричная система счисления (c = 8):

$m = 3i$: $(374)_i$;

$m = 6 + 6k$: $640632(654321)_k$;

$m = 2(3i + j) + t$: $(654321)_i(70)_j(7)_t$, $0 \leq t \leq i{-}1$;

$m = 5i + 2t$: $(76431)_i(52)_t$, $1 \leq t \leq i$;

$m = 7i + 2k + t$: $(7654321)_i(70)_k(0)_t$, $0 \leq t \leq i$; $k = 0$, $k \geq 1$ if $t \geq 1$;

$m = 7i$: $(61)_{i-k}(374)_i(52)_{i+k}$;

$(i, j) \geq 1$ – натуральные (положительные) числа; $k \geq 0$.

Здесь мы еще раз убеждаемся в справедливости принятого названия "аттракторы".

На константы терминологически они "слабо тянут", поскольку их невообразимо много: у каждых n-значных чисел существуют по несколько точек притяжения, которые к тому же еще зависят и от систем счисления.

Потеря некоторого изящества в связи с неоднозначностью решения для многоразрядных чисел с лихвой компенсируется рассмотрением преобразований в системах счисления с сохранением записи в этих же системах.

Характерные примеры *K*-аттракторов в десятичной системе счисления.

$(81)_1(63)_2(954)_3(72)_4$ => 87765443219997765543222

$(81)_1(63)_3(954)_5(72)_7$ => 877776554443322199999777665554432222

$(81)_1(63)_4(954)_7(72)_{10}$ => 8777777655544443332221999999777766655544432222222

$(81)_1(63)_5(954)_9(72)_{13}$ => 87777777765555444443333222219999999997777766665555544443222222222

$(875421)_5(63)_4(90)_39_0$ => 99999977777555553333111088888666644444222222000001

$(875421)_5(63)_4(90)_39_1$ => 9999998777765555433321110988887666544443222221000001

$(875421)_5(63)_4(90)_39_2$ => 9999998877766555443322110998887766554443322211000001

$(875421)_5(63)_4(90)_39_3$ => 9999998887766655444322210999887776555443332221110000001

$(875421)_5(63)_4(90)_39_4$ => 99999988888766665444422220999987777555543333211110000001

$(987654321)_4(63)_0(90)_00_0$ => 8888666644442221999777755553333 1112

$(987654321)_4(63)_0(90)_00_1$ => 9888766654443222099987776555433321111

$(987654321)_4(63)_0(90)_00_2$ => 99887766554433221099887766554433221101

$(987654321)_4(63)_0(90)_00_3$ => 999877765554333211098887666544432221001

$(987654321)_4(63)_0(90)_00_4$ => 9999777755553333111088886666444422220001

$(987654321)_3(63)_3(90)_40_1$ => 999998876654433332209987766665543321100001

$(987654321)_3(63)_3(90)_40_2$ => 9999998776554333332109887666665443221000001

$(987654321)_3(63)_3(90)_40_3$ => 99999997775553333333110888666666444222000000 1

$(987654321)_1(63)_{14}(90)_0 0_1$ => 97533333333333333308666666666666666421
$(987654321)_1(63)_{13}(90)_1 0_1$ => 99753333333333333308666666666666664201
$(987654321)_1(63)_{12}(90)_2 0_1$ => 99975333333333333308666666666666642001
$(987654321)_1(63)_{11}(90)_3 0_1$ => 99997533333333333308666666666666420001
$(987654321)_1(63)_{10}(90)_4 0_1$ => 99999753333333333308666666666664200001
$(987654321)_1(63)_9(90)_5 0_1$ => 99999975333333333308666666666642000001
$(987654321)_1(63)_8(90)_6 0_1$ => 99999997533333333308666666666420000001
$(987654321)_1(63)_7(90)_7 0_1$ => 99999999753333333308666666664200000001
$(987654321)_1(63)_6(90)_8 0_1$ => 99999999975333333308666666642000000001
$(987654321)_1(63)_5(90)_9 0_1$ => 99999999997533333308666666420000000001
$(987654321)_1(63)_4(90)_{10} 0_1$ => 99999999999753333308666664200000000001
$(987654321)_1(63)_3(90)_{11} 0_1$ => 99999999999975333308666642000000000001
$(987654321)_1(63)_2(90)_{12} 0_1$ => 99999999999997533308666420000000000001
$(987654321)_1(63)_1(90)_{13} 0_1$ => 99999999999999753308664200000000000001
$(987654321)_1(63)_0(90)_{14} 0_1$ => 99999999999999975308642000000000000001

Структурные свойства инверсно-числовых аттракторов.

1. Сумма крайних знаков (для $m \geq 4$) равна основанию системы счисления $\delta_n + \delta_0 = c$.

2. Сумма двух средних знаков равна $\delta_{n-j} + \delta_j = c - 2$. В отдельных случаях между ними может находиться набор цифр, равных $c - 1$ (рис. 5).

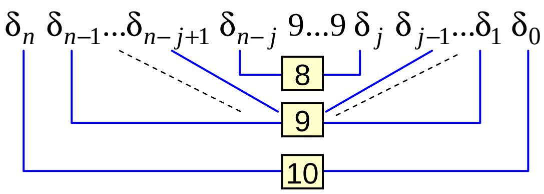

Рис. 5. Структура инверсно-числовых K-аттракторов:
девятки внутри присутствуют не всегда

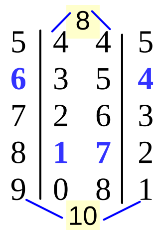

Рис. 6. 25 комбинаций-претендентов на K-аттрактор для 4-значных чисел

3. Сумма остальных равноудаленных от краев знаков равна $\delta_{n-1} + \delta_1 = c - 1$ и т.д.

4. $K(x) = 0(\mathrm{mod}\ c')$, где $c' = c - 1$.

5. Есть общие формы аттракторов, которые не зависят от основания c.

Так, для четных значений c

$$\left(\overline{xyz}\right)_j \Rightarrow \overline{z_{j-1} x y_j x_{j-1} z},$$

где $y = c - 1$, $z = c/2$, $x = z - 1$.

Например, $c = 10$: $(495)_4$ => 555499994445;
$c = 8$: $(374)_4$ => 444377773334;
$c = 6$: $(253)_4$ => 333255552223;
$c = 4$: $(132)_4$ => 222133331112.

Существуют и другие объединяющие структуры, но это предмет отдельного исследования.

В десятичной системе счисления:

6. Первая цифра не меньше 5, кроме 495 – единственного (!) из семейства всех аттракторов, которое в десятичной системе счисления начинается на цифру, меньшую пяти.

7. Первая цифра равна 5 только для форм типа $(954)_i$, $i \geq 1$.

8. Первая цифра равна 6 только для форм типа $6174(63)_k$, $k \geq 0$.

9. Нет форм, начинающихся на цифру 7.

10. Первая цифра равна 8 только для форм типа $(987654321)_i(63)_k$, $(81)_{u_0}(63)_{u_1}(954)_{u_2}(73)_{u_3}$.

11. Если первая цифра равна 5–8, то аттрактор не содержит нулей.

С учетом изложенных свойств, в частности, для четырехзначных чисел по составу цифр на краях и в середине можно образовать только 25 комбинаций-претендентов на *K*-аттрактор (рис. 6), из которых окончательным реальным аттрактором становится лишь число 6174.

Можно сказать, что это альтернативное доказательство существования константы 6174.

Некоторые свойства числа 6174.

1. Получение числа в последовательностях Фибоначчи F_n:

$(f_0, f_1) = (0, 9)$:

$$f_n = f_1 F_n + f_0 F_{n-1} = f_1 \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = 9\frac{\Phi^{10} - \Phi^{10}}{\sqrt{5}} = 9\left\langle \frac{\Phi^{10}}{\sqrt{5}} \right\rangle = 495,\ 495 = 9F_{10} = 9 \cdot 55 = 495;$$

$(f_0, f_1) = (36, 90)$:

$$f_n = f_1 F_n + f_0 F_{n-1} = 90F_{10} + 36F_9 = 90\left\langle \frac{\Phi^{10}}{\sqrt{5}} \right\rangle + 36\left\langle \frac{\Phi^{9}}{\sqrt{5}} \right\rangle = 90 \cdot 55 + 36 \cdot 34 = 6174.$$

2. Число $6174 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^3 = 2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$ обладает свойством: корень квадратный из суммы квадратов его простых сомножителей – целое число (A134605 [17]) $\sqrt{1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 7^2} = 13$.

3. Кроме того, $6174 = k^3 + k^2 + k = 18^3 + 18^2 + 18^1$.

4. $2\cdot C_n^3 - C_n^2 = \dfrac{(2n-3)(n+1)(n+2)}{6} = 6174$ при $n = 28$.

5. Величина $n\cdot\varphi(n)\cdot\varphi(\varphi(n))$ – квадрат (A116002, [17]): 4000, 5324, **6174**, 6250, 6912…, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел, не больших целого $n > 0$ и взаимно простых с ним.

6. <u>$k = 6174$</u>: $k^2 \pm p_k$ = (38179639, 38056913) – простые числа (A064483, [17]), где p_k – k-е простое число.

7. $k\cdot p_k \pm 1$ – пара простых чисел: $6174\cdot61363 \pm 1$ = (378855161, 378855163).

Размышлизмы «Разное».

1. Соревновательный процесс поиска больших простых чисел скоро приостановится и затем вовсе сойдет на нет. Не имея конкретного конечного предела, он становится все менее актуальным даже для "гонок" в быстродействии ЭВМ.

Числовые конструкции типа *K*-аттракторов, наоборот, могут оказаться весьма полезными образованиями, особенно, в области больших чисел.

2. Можно ли сформировать случайную последовательность из натуральных чисел? – Оказывается, нет, если верхний "потолок" неограничен. Но мы можем сформировать с любой точностью вещественные числа [0, 1], а потом увеличить их в 10^n.

С *K*-аттракторами несколько легче, поскольку мы получили аналитические формы.

3. Часто предпринимаются поиски сакрального осмысления констант Капрекара. На наш взгляд, в виду безмерного (по количеству знаков) и бесконечного (по количеству) множества этих констант подобное занятие становится малопродуктивным в обозримом будущем. Тем более что оно в большой мере зависит от принятой позиционной системы счисления.

4. Алгоритм последовательного применения функции Капрекара сам по себе несложный, но в процессе вычислений происходит многократное преобразование чисел так, что от исходного числа практически ничего не остается.

В результате конечная величина становится больше заложником процедуры и достаточно вяло реагирует на исходные данные.

5. Современные компьютеры сегодня прямым счетом легко выявляют константы с достаточно длинными оцифровками. Это существенно расширяет экспериментальное пространство, в котором мы можем "нащупывать" островки общих представлений, выходящих далеко в бесконечность за пределы этого пространство.

Ну, и конечно самым важным аспектом здесь является поиск закономерностей, когда велико желание в целом «научиться выявлению причин» (Аристотель) с надеждой на последующее применение, а «не токмо забавы ради».

6. В принципе вопрос даже не в том, почему отклик (реакция) четырехзначных чисел по схеме Капрекара именно такова и сводится к числу 6174. Из этого вытекает более важная мысль: «Локальные (специфические) манипуляции с элементами любой цифровой структуры способны проявлять закономерности их естественного существования в числовом континууме» [23].

Можно сказать и другими словами «Если долго мучиться, что-нибудь получится». Такой своеобразный эпиграф к числовым манипуляциям.

И здесь важно уметь преобразовывать, превращать и трансформировать числовые или цифровые объекты в новые формы и структуры представления.

7. Исследователи чисел ищут новые, небывалые способы и действия, которые совершенствуют не только базовый набор возможных операций, но и расширяет их сферу осмысления, приближая тем самым людей к пониманию природных способов действия и природных феноменов. Но вот второе здесь весьма затруднительно, поскольку системы счисления – исключительно плод человеческого воображения, имеющий отдаленное отношение к природным факторам. В этом легко убедиться, если, например, количество атомов во Вселенной записать в триллионе разных систем счисления.

8. Часто предпринимаются попытки установления связи аттракторов с другими числовыми величинами. Например, в работе [24] для числа $K = 6174$ выявлено приблизительное равенство

$$K / R(K) = 6174 / 4716 = 1{,}3091603.. \approx \Phi^2/2 = 1{,}3090169..$$

и утверждается, что «с учетом потрясающей точности совпадения, это никак не может быть случайным». На наш взгляд, подобных аттракторов миллиарды, хотя для четырехзначного числа он действительно один. Но именно это и подтверждает его случайную близость с числом гармонической пропорции $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ за счет их манипуляций.

В работе [25] Капрекар причисляется даже к патриархам числонавтики.

Хотя с таким же успехом в этот "союз" могут быть отнесены и многие другие математики, внесшие свой вклад в развитие теории чисел.

Если посмотреть глубже, то рассмотренные аттракторы образуются в результате вполне цивильной и законной операции на стыке теории чисел, комбинаторики и сортировки данных. Взять, к примеру, числа-палиндромы, совершенные числа и т.п.

Довольно необычная операция!? – Это верно.

Но вовсе не сакрально-магического толка.

Полностью прогнозируема, вычисляема. Имеет однозначное решение. Предполагает аналитические формулы.

Так же как операция нумерологического сокращения (до цифры) или теософской редукции де-факто означает сравнение исходного числа x по $\bmod 9$ или определение остатка при делении x на девятку, равную уменьшенному на единицу основанию 10-ричной системы счисления.

Искусственный налет загадочно-мистического тумана постепенно рассеивается, уступая место прогнозируемым вычислительным процедурам на уровне простых арифметических действий.

Дальнейшее сопровождение, осмысление и окрашивание получаемых результатов, в том числе в терминах нумерологии, – дело вкуса и веры, как впрочем, и весь окружающий человека мир. За одним исключением: числа – абсолютно абстрактные (реально несуществующие) образования как высокоинтеллектуальный плод человеческого мышления.

Выводы.

Предложена новая форма представления инверсно-числовых аттракторов в виде структурированных наборов цифр (знаков).

Она отличается наглядностью, простотой и удобством описания числовых точек притяжения сколь угодно большой размерности в разных позиционных системах счисления.

Отличительной особенность аналитических обобщений является использование приема "порождающего фактора", когда записываются не сами готовые решения, а наборы (совокупности) знаков, которые эти решения порождают.

Дальнейшие исследования целесообразно сосредоточить на поиске аналитических форм инверсно-числовых аттракторов, универсальных для разных систем счисления.

Литература.

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
2. *Kaprekar D.R.* An Interesting Property of the Number 6174 // Scripta Math. – 15, 244–245, 1955.
3. *Гарднер М.* Самопорожденные числа. – http://golovolomka.hobby.ru/books/gardner/content.shtml.
4. *Hasse H., Prichett G.D.* The determination of all four-digit Kaprekar constants // J. Reine Angew. Math. – 299/300, 113–124, 1978.
5. *Prichett G.D., Hasse H.* The determination of all four-digit Kaprekar constants // Journal für die reine und angewandte Mathematic (Crelles Journal). – 300, 113–124, 1978.
6. *Ludington A.L.* A bound on Kaprekar constants // Journal für die reine und angewandte Mathematic (Crelles Journal). – 310, 196–203, 1979. – http://www.reference-global.com/doi/abs/10.1515/crll.1979.310.196.
7. *Lapenta J.F., Ludington A.L., Prichett G.D.* An algorithm to determine self-producing r-digit g-adic integers // J. Reine Angew. Math. – 310, 100–110, 1979.
8. *Prichett G.D., Ludington A.L., Lapenta J.F.* The determination of all decadic Kaprekar constants // Fibonacci Quart. – 19, N 1, 45–52, 1981.
9. *Kiyoshi Iseki*. Note on Kaprekar's constant // Math. Japon. – 29, N 2, 237–239, 1984.

10. *Klaus E. Eldridge, Seok Sagong*. The Determination of Kaprekar Convergence and Loop Convergence of All Three-Digit Numbers // The American Mathematical Monthly. – 95, N 2, pp. 105–112, 1988. – http://www.jstor.org/pss/2323062.

11. *Eldridge K.E., Sagong S*. The Determination of Kaprekar Convergence and Loop Convergence of All 3-Digit Numbers // Amer. Math. Monthly. – 95, 105–112, 1988.

12. *Young A.L*. A Variation on the 2-digit Kaprekar Routine // Fibonacci Quart. – 31, 138–145, 1993.

13. *Douglas E. Iannucci*. The Kaprekar Numbers // Journal of Integer Sequences. – 3, Article 00.1.2, 2000. – http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL3/iann2a.html.

14. *Byron L.W*. Searching for Kaprekar’s Constants: Algorithms and Results. – www.emis.de/journals/HOA/IJMMS/Volume2005_18/3004.pdf.

15. *Deutsch D., Goldman B*. Kaprekar's Constant // Math. Teacher. – 98, 234–242, 2004.

16. *Папюс А.Ж*. Наука о числах: Пер. с фр. – М.: АСТ, 1999. – 384 с.

17. *Sloane N.J.A*. Sequences A064483, A099009, A099010, A116002, A134605 in the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/.

18. *What's* this Kaprekar Series? – http://kaprekar.sourceforge.net/.

19. *Бахтизин Р., Штукатуров К*. Арифметические аттракторы // Наука и жизнь, 2000, № 9.

20. *Постоянная* Капрекара – число 145. – 2007. – http://number.blog.ru/2131169. html.

21. *Василенко С.Л*. Периодичность теософской редукции для линейных возвратных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15368, 27.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321130.htm.

22. *Нишияма Ю*. Загадочное число 6174 // Plus. – 2006. – Вып. 38. – ttp://www.numbernautics.ru/content/view/464/27/. – *Nishiyama Y*. Mysterious number 6174. – http://plus.maths.org/issue38/features/nishiyama/index.html.

23. *Корнеев А.А*. Связи чисел Капрекара и Фибоначчи. – http://www.numbernautics.ru/content/view/547/30/.

24. *Корнеев А.А*. Игры с числом Капрекара. – http://www.numbernautics.ru/content/view/514/40.

25. *Корнеев А.А*. Д.Р. Капрекар – Патриарх числонавтики. – http://www.numbernautics.ru/content/view/458/27.

6174