С.Л. Василенко

Периодические структуры на циферблате Фибоначчи

Вначале было число, и имя ему ничто… ВаСиЛенко

Числа давно и прочно прописались в нашей жизни.

Уже и не поймешь: то ли мы их ... внедряем в мироустройство, то ли они нас ... радуют своим присутствием в природе.

В работе [1] приведен весьма интересный анализ, посвященный рассмотрению «проблемы превращения телесных пифагорейских чисел в бестелесные числа у Евклида».

Так, автор сравнивает 24 с понятием качества "чего?", тем самым увязывая количественную определенность чисел с их качественной составляющей, апеллируя при этом к здравому уму человека.

Мы бы еще добавили здесь и массу других, не менее приемлемых характеристик:

24 – А это много (мало)? А это больше (меньше)? И хватит ли этого или нет? А у нас достаточно места, чтобы это поместить? А сколько еще? И сколько остается?

И нет этому ни конца, ни края.

В то же время многие моменты, которые представляются важным для людей, совершенно не имеют никакого значения (смысла) для природы. Вселенная может запросто следовать своим законы на собственном языке типа «больше – меньше», соединяющем воедино количественно-качественное представление в неразрывное целое без какого-либо деления на "отдельные органы". И такого феномена, который нами принято называть анализом, на самом деле просто нет. Но есть исключительно синтез, когда части в целом перестают быть элементами, полностью теряя идентифицируемую индивидуальность.

Вроде и есть желудок, но вроде его и нет. Он поглощен или "съеден" человеком.

Поэтому вопрос о реальном или абстрактном существовании чисел – это вопрос чистой и целомудренной веры, чем-то схожей с верованием в бога.

Такую преданность числам, как и существование самих численностей, невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

На любое утверждение здесь можно сформулировать и обосновать симметричное контрпредложение. И возникающей полемике не будет конца до скончания веков.

Да она и нужна-то в принципе исключительно для оттачивания мыслительных процессов и умозрительных воззрений, не поддающихся подлинной верификации на практике. Апробация как одобрение здесь не в счет.

Поэтому самое главное в числах для человека – их утилитарная польза в теоретических изысканиях и повседневных реалиях жизни.

А есть ли, например, 24 в удаленной галактике? – природе неважно.

Пусть там будет хоть 37. Чего? – Да хоть чего. Хотя бы того же 24.

Бог сотворил землю за 6 дней. А чему ж все-таки равен этот "день-деньской", уже второй вопрос?

Может, солнечный год. Но, возможно, и 1000 лет или вовсе 100 по "999 чего-нибудь". Основное, что этих "чего-нибудь", которые летописцы назвали "днем", – 6 плюс 1 на отдых.

Куда важнее, что сегодня у нас в сутках есть 24 часа или 24 цифры-числа в последовательности Фибоначчи по модулю 9 (нум-сокращении ряда), чему мы собственно и попробуем уделить свое основное внимание, нисколько не ставя под сомнение мнение людей с их правотой или ошибочностью взглядов на статус-кво чисел в мироздании.

И пусть они будут всегда. Без них мир стал бы намного скучнее. Но и "проверять алгеброй гармонию" – не самое лучшее их применение.

А потому рассмотрим задачу комплексного отражения структурно-периодических последовательностей Фибоначчи на круговых диаграммах.

Числа Фибоначчи как модель минимальных возможностей. Как известно, числа Фибоначчи генерируются по наиболее простой рекуррентной схеме суммирования двух переменных

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

Они нашли широкое применение в современной теории чисел и не только.

В чем же истинное содержание данного математического объекта?

Прежде всего, это аддитивная динамическая модель линейного дискретного типа.

Сама формула (1) называется линейным однородным разностным (возвратным) уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Структурно данная математическая форма отличается минимально возможной простотой в классе аддитивных конструкций, имея принципиальные отличительные особенности в правой формообразующей части:

– два слагаемых как наименьшая совокупность, – меньше просто не бывает;
– два рядом стоящих дискретных момента времени с минимальными запаздываниями;
– два целочисленных единичных коэффициента.

Другими словами, налицо три пары "минимальных возможностей".

Обобщающим свойством суммирования можно также назвать квадратичный характер характеристического полинома для разностного уравнения (1), что выражается самым простым трехчленным алгебраическим уравнением второго порядка $x^2 - x - 1 = 0$.

Незамысловатая по форме модель Фибоначчи уводит нас в бесконечность не только во времени, но и относительно моделируемой переменной. Напрашивается аллегория, если б так и было, то давно уже кролики заполнили всю Вселенную.

На самом деле подобное не происходит, поскольку в реальных условиях еще работает система ограничений и лимитирующих факторов.

Периодизация рядов Фибоначчи. Общее движение бесконечно возрастающих чисел вполне корректно рассмотреть путем сопоставления гармоничного взаимодействия частей в целом по формуле Фибоначчи.

Она имеет ряд собственных особенностей и много разных обобщений, вскрывая целые пласты моделей, максимально приближенных к реальным процессам в мироздании.

Для нас удобнее перейти к периодической последовательности Фибоначчи по модулю

$$f_{j+1} = \left(f_j + f_{j-1}\right) (\mathrm{mod}\ m) \qquad (2)$$

для любых натуральных начальных условий $f_0\ (\mathrm{mod}\ m)$ и $f_1\ (\mathrm{mod}\ m)$

В этой схеме для анализа удобно предусмотреть замену получающихся нулей на m.

Нечто похожее осуществляется при теософской редукции или нумерологическом сокращении [2]. Например, 27 = 9 (mod 9).

В зависимости от произвольной пары затравочных чисел можно сформировать четыре принципиально различимые периодические последовательности (табл. 1)

Таблица 1

Периодические ряды Фибоначчи по (mod 9)

F_{1j}	**1**	**1**	2	3	5	8	4	3	7	1	8	9	**8**	**8**	7	6	4	1	5	6	2	8	1	9	1	1	...	24
F_{2j}	**2**	**2**	4	6	1	7	8	6	5	2	7	9	**7**	**7**	5	3	8	2	1	3	4	7	2	9	2	2	...	24
F_{3j}	**3**	**3**	6	9	6	6	3	9	3	3	6	9	**6**	**6**	3	9	3	3	6	9	6	6	3	9				8
F_{4j}	**4**	**4**	8	3	2	5	7	3	1	4	5	9	**5**	**5**	1	6	7	4	2	6	8	5	4	9	4	4	...	24

Если пара начальных условий по (mod 9) не содержит числа (3, 6, 9) в любой их комбинации, кроме тривиальной пары $(0, 0) \to (9, 9)$, то период циклического ряда равен 24.

Эту же таблицу можно представить компактными подмножествами чисел (с нижним индексом повторения) без указания их порядка следования:

	Формы представления	
f_{1j}	$(18)_5(2345679)_2$	$(18)_3(123456789)_2$
f_{2j}	$(27)_5(1345689)_2$	$(27)_3(123456789)_2$
f_{3j}	$(36)_3(9)_2$	$(36)_2(369)_2$
f_{4j}	$(45)_5(1236789)_2$	$(45)_3(123456789)_2$

Отметим некоторые отличительные особенности этих цифровых рядов:

1. Имеется в наличии 5 сочетаний $1-2-3-4$.
2. Имеется в наличии 5 сочетаний $8-7-6-5$.
3. Справедливо базовое соотношение как сравнение по модулю:

$$f_{2j} + f_{3j} + f_{4j} = 0 \pmod 9.$$

Следствие: $f_{1j} = \left(f_{1j} + f_{2j} + f_{3j} + f_{4j}\right) \pmod 9$.

4. По полупериодам для каждой последовательности выполняется равенство:

$$f_{k,j} + f_{k+12,j} = 0 \pmod 9,$$

где индексы принимают значения: $k = 1 \div 4$; $j = 1 \div 24$.

Для сопоставления рассмотрим другой интересный пример [3] по mod 10 (табл. 2).

Таблица 2

Последовательность Фибоначчи по (mod 10) периодичностью $T = 60$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	7	0	7	7	4	1	5	6	1	7	8	5	3	8	1	9	0
b	9	9	8	7	5	2	7	9	6	5	1	6	7	3	0	3	3	6	9	5	4	9	3	2	5	7	2	9	1	0
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Здесь мы подмечаем пары одинаковых ячеек, расположенных симметрично относительно центра на четных позициях:

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad \frac{1}{9}\ \frac{3}{7}\ \frac{8}{2}\ \frac{1}{9}\ \frac{5}{5}\ \frac{4}{6}\ \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{3}\ \frac{4}{6}\ \frac{5}{5}\ \frac{1}{9}\ \frac{8}{2}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{9}.$$

Похожая картина наблюдается и по мере прохождения нечетных номеров, только с перевернутой правой частью:

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{1}{9}\ \frac{2}{8}\ \frac{5}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{6}\ \frac{9}{1}\ \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{6}{4}\ \frac{7}{3}\ \frac{5}{5}\ \frac{8}{2}\ \frac{9}{1}.$$

Даже беглое сравнение показывает, что данные множества содержат абсолютно идентичные пары цифр, а именно: по 4 пары (1, 9), (3, 7) и по 2 пары (4, 6), (2, 8).

Налицо также очевидная закономерность в виде суммы $a + b = 10$.

Анализируя все $T = 60$ повторяющиеся числа как единый ряд, где каждому числу соответствует свой порядковый номер, запишем выявленные свойства в виде равенств:

симметрия нечетных номеров

$$F_{2k+1} = F_{T-(2k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

например, $F_1 = F_{59} = 1$, $F_3 = F_{57} = 2$, $F_5 = F_{55} = 5 \ldots F_{21} = F_{39} = 6, \ldots$

симметрия четных номеров

$$F_{2m} = F_{T/2-2m},$$
$$F_{T/2+2m} = F_{T-2m}, \qquad m = 1, 2, 3, \dots,$$

например, $\dfrac{F_2 = F_{28} = 1}{F_{32} = F_{58} = 9}, \ \dfrac{F_4 = F_{26} = 3}{F_{34} = F_{56} = 7}, \dots, \dfrac{F_{14} = F_{16} = 7}{F_{44} = F_{46} = 3}$.

Симметричное ориентирование чисел с четно-нечетными индексами отображено на рис. 1.

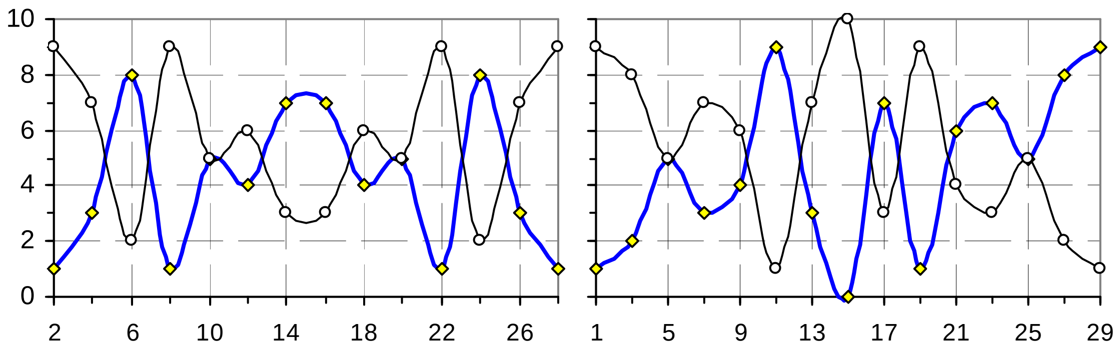


Рис. 1. Последовательность Фибоначчи по (mod 10):
симметричное ориентирование чисел с четными (слева) и нечетными (справа) индексами

Анализ числовых последовательностей Фибоначчи по (mod m) и их периодических закономерностей удобно проводить на круговых диаграммах (рис. 2).

Определение. Циферблат Фибоначчи – круговая диаграмма, на которой по контурам двух окружностей нанесены значения двух полупериодов числовой последовательности $f_{j+1} = \left(f_j + f_{j-1}\right)(\mathrm{mod}\ m)$.

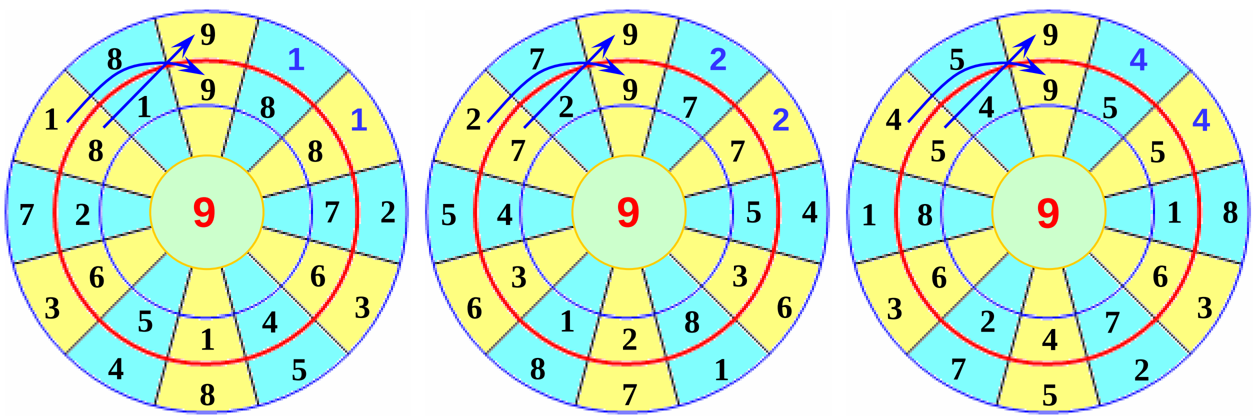
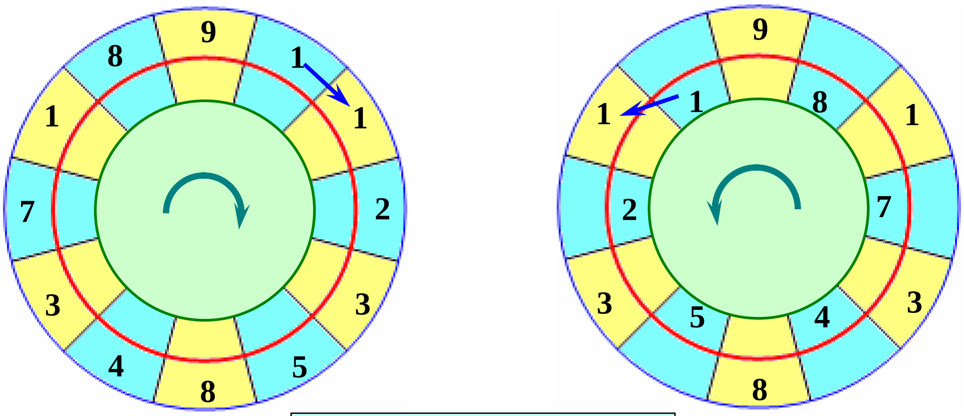


Рис. 2. Циклический (периодический) ряд по (mod 9) на циферблате Фибоначчи
с разными начальными условиями: (1, 1), (2, 2), (4, 4)

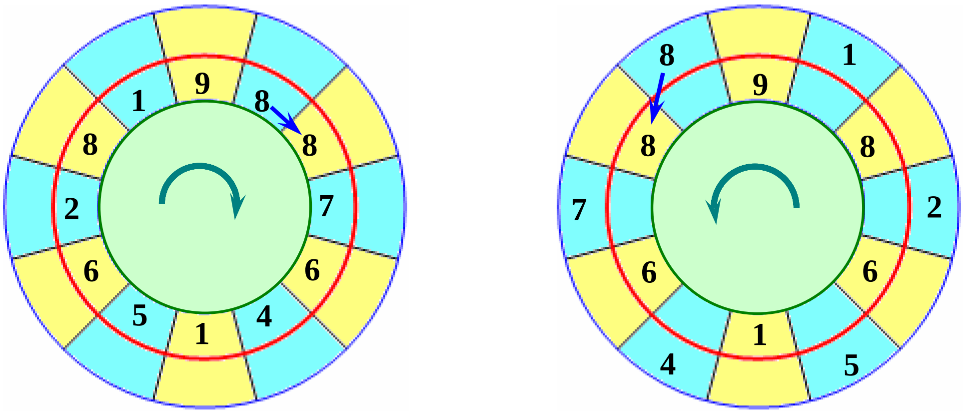
В общем случае возможны и более сложные построения на основе всевозможных обобщенных последовательностей Фибоначчи.

Исходя из симметрии четных и нечетных номеров возможно двухсторонне формирование чисел по внешнему (рис. 3) и внутреннему (рис. 4) контуру.



1 1 2 3 5 8 4 3 7 1 8 9

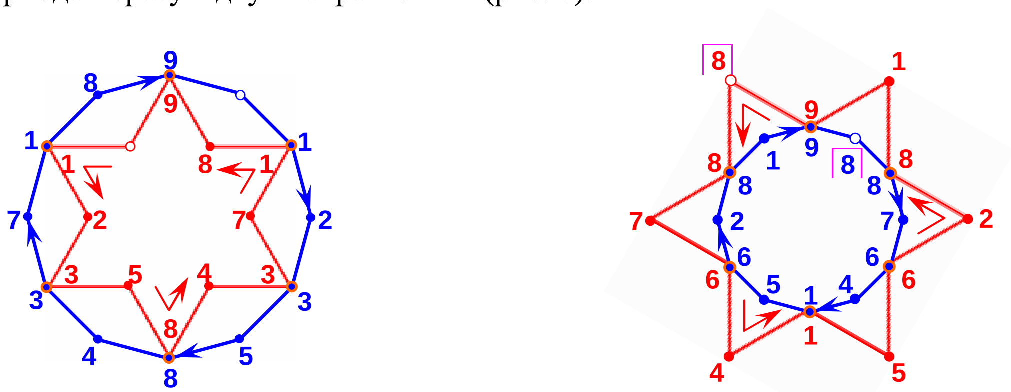
Рис. 3. Двухстороннее формирование чисел по внешнему кругу



8 8 7 6 4 1 5 6 2 8 1 9

Рис. 4. Двухстороннее формирование чисел по внутреннему кругу

Взаимно-реверсное формирование чисел отдельно по внутреннему и внешнему кругу (рис. 3 и рис. 4) можно увязать или ужать в объединенную схему с похожим движением по двум полупериодам сразу в двух направлениях (рис. 5).



1 1 2 3 5 8 4 3 7 1 8 9

8 8 7 6 4 1 5 6 2 8 1 9

Рис. 5. Взаимно-реверсное формирование чисел по внешнему и внутреннему кругу циферблата Фибоначчи по (mod 9) на примере единичных начальных условий

Подобные трансформации наблюдаются и в иных "модуляциях" (рис. 6).

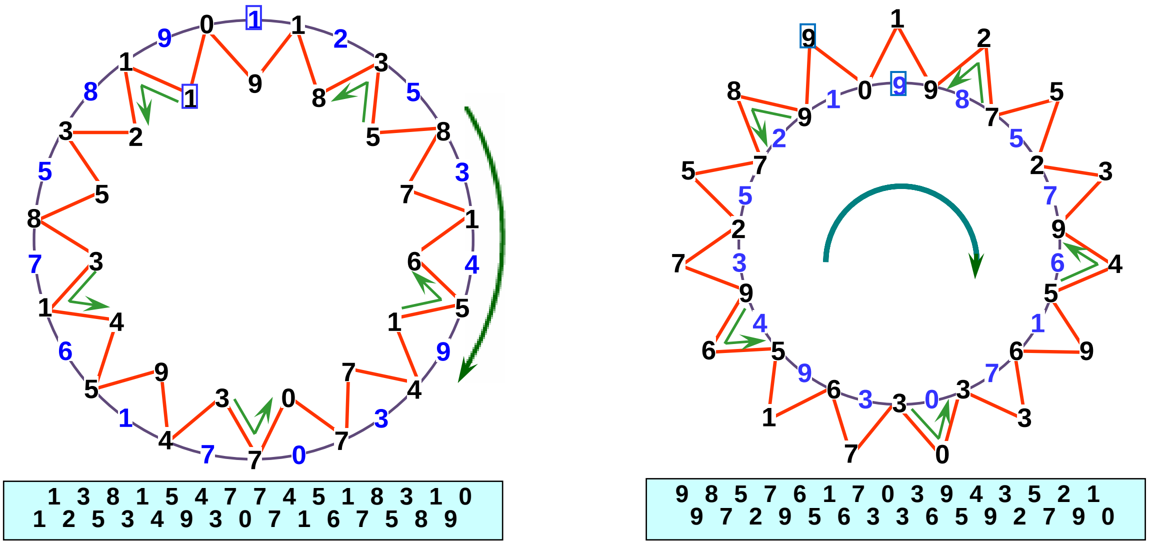


Рис. 6. Взаимно-реверсное формирование чисел по внешнему и внутреннему кругу циферблата Фибоначчи по (mod 10) на примере единичных начальных условий

По-прежнему сохраняется замечательное свойство абсолютного тождества последовательностей: круговой ход по часовой стрелке и зигзагообразное движение против часовой стрелки.

Такая схема, на наш взгляд, отражает дульный процесс настоящего. А именно его перманентный уход в прошлое и одновременно возникновение из прошлого.

Нескончаемое и вечное дление настоящего, скорее всего, как дискретно образующее отрицание отрицания. – Нечто похожее на 24-кадровое кино.

Периоды последовательностей по (mod *m*) отличаются разнообразием (табл. 3), но в своем большинстве имеют значения, кратные 24.

Для отображения числовых периодичностей помимо циферблата довольно удобным инструментарием и топологическим образом может служить трилистник (рис. 7).

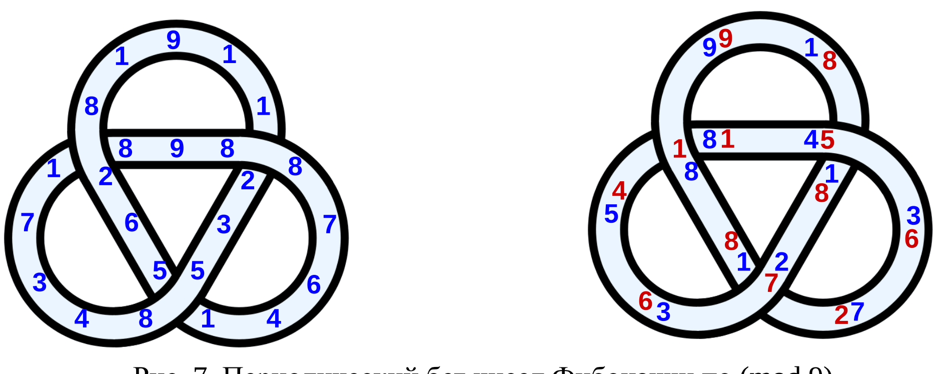


Рис. 7. Периодический бег чисел Фибоначчи по (mod 9) на трилистнике /с единичными начальными условиями/

Анализ времени. В циферблате Фибоначчи нам важны не столько цифры сами по себе, сколько их реверсное движение и взаимное превращение, симметрия и периодичность. В прямом направлении по циферблату (см. рис. 2) идет попеременное движение: сначала по одной окружности с последующим переходом (через 12 шагов) на другую окружность.

Здесь четко просматривается схема по принципу "Будущее = Настоящее + Прошлое".

Ход в обратном направлении по той же последовательности цифр уже сопряжен с постоянным перескакиванием с одной окружности на другую.

Таблица 3

Периоды теософской редукции для последовательностей Фибоначчи

$$f_n = (af_{n-1} + bf_{n-2}) \pmod m$$

$m = 5$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	20	4	24	6	2	20	4	24	6	2
2	12	24	4	2	4	12	24	4	2	4
3	12	24	2	10	4	12	24	2	10	4
4	20	2	24	3	2	20	2	24	3	2
5	2	8	8	4	2	2	8	8	4	2
6	20	4	24	6	2	20	4	24	6	2
7	12	24	4	2	4	12	24	4	2	4
8	12	24	2	10	4	12	24	2	10	4
9	20	2	24	3	2	20	2	24	3	2
10	2	8	8	4	2	2	8	8	4	2

$m = 6$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	24	6	3	8	6	2	24	6	3	8
2	8	2	2	8	2	2	8	2	2	8
3	3	4	3	2	12	2	3	4	3	2
4	8	6	2	8	6	2	8	6	2	8
5	24	2	6	8	3	2	24	2	6	8
6	2	4	2	2	4	2	2	4	2	2
7	24	6	3	8	6	2	24	6	3	8
8	8	2	2	8	2	2	8	2	2	8
9	3	4	3	2	12	2	3	4	3	2
10	8	6	2	8	6	2	8	6	2	8

$m = 7$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16	6	24	48	21	6	2	16	6	24
2	6	48	6	48	24	2	3	6	48	6
3	16	48	42	6	2	8	6	16	48	42
4	16	48	21	2	6	8	3	16	48	21
5	6	48	2	48	24	14	6	6	48	2
6	16	2	24	48	42	3	2	16	2	24
7	2	6	12	6	12	4	2	2	6	12
8	16	6	24	48	21	6	2	16	6	24
9	6	48	6	48	24	2	3	6	48	6
10	16	48	42	6	2	8	6	16	48	42

$m = 8$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12	2	6	2	12	2	6	2	12	2
2	4	–	4	–	4	–	2	–	4	–
3	12	2	6	2	12	2	6	2	12	2
4	4	–	4	–	2	–	4	–	4	–
5	12	2	6	2	12	2	6	2	12	2
6	4	–	2	–	4	–	4	–	4	–
7	12	2	6	2	12	2	3	2	12	2
8	2	–	4	–	4	–	4	–	2	–
9	12	2	6	2	12	2	6	2	12	2
10	4	–	4	–	4	–	2	–	4	–

$m = 9$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	24	18	3	24	18	3	24	6	2	24
2	24	3	2	24	3	6	24	2	6	24
3	6	12	2	6	12	2	2	12	2	6
4	8	6	3	24	18	2	24	18	3	8
5	8	3	6	24	2	2	24	3	6	8
6	6	12	2	2	12	2	6	12	2	6
7	24	18	2	24	6	3	24	18	3	24
8	24	2	6	24	3	6	24	3	2	24
9	2	12	2	6	12	2	6	4	2	2
10	24	18	3	24	18	3	24	6	2	24

$m = 10$

a\b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	60	4	24	6	3	20	12	24	6	2
2	12	24	4	2	4	12	24	4	2	4
3	12	24	3	10	12	12	24	2	30	4
4	20	2	24	3	2	20	2	24	3	2
5	3	8	24	4	3	2	24	8	12	2
6	20	4	24	6	2	20	4	24	6	2
7	12	24	12	2	12	12	24	4	3	4
8	12	24	2	10	4	12	24	2	10	4
9	60	2	24	3	6	20	3	24	3	2
10	2	8	8	4	2	2	8	8	4	2

В этом контексте отдаленный взгляд в прошлое как бы все время корректирует себя на настоящее. То есть беспрерывного хода времени в прошлое на самом деле нет.

Возможно, такая схема движения поможет нам ответить на главный вопрос: почему реальное время бежит в одном направлении? Или что обусловливает стрелу времени?

Прямой бег из прошлого в будущее постоянно "съедает" настоящее, появляющееся (нарождающееся) из будущего.

Обратный бег из настоящего в прошлое уже связан с пошаговой корректировкой настоящего в прошлом и переоценкой или сверкой прошлого по отношению к настоящему.

То есть время здесь фактически знакопеременно.

В этом контексте предсказывать (прогнозировать) чье-то будущее даже легче, чем достоверно описывать малоизвестное доселе прошлое.

Поэтому будущее многими представляется хотя и не выразительным, но более или менее похожим относительно настоящего – одного на всех.

Прошлое же, хотя и свершившееся, по мере удаления от настоящего наоборот воспринимается не то что разнопланово, а вообще принципиально неодинаково. Когда даже тривиальные вещи оцениваются на диаметрально противоположных позициях.

Видимо, поэтому и не так просто реализовать "путешествие во времени".

В прошлое – потому, что как однородного состояния его фактически нет. Если и можно уйти, то в прошлое как небытие, что и происходит с нами.

В будущее – потому, что скачок, если и возможен, то только индивидуальный и без возврата назад в момент покидания настоящего. Это нечто вознесения, природа которого нам совершенно не ясна. Но просто взять и выдумать подобное люди вряд ли могли.

Одной мысли или желания такового здесь было мало. Что-то все-таки конкретно побудило принять такую гипотезу, пусть даже только на уровне богословия.

Своеобразная ниточка или связь с будущим, которая, в самом деле, существует.

Отвлеченного будущего нет. Но есть будущее, основанное на настоящем, из него вытекающее и наполненное новым содержанием.

Философский аспект. Попробуем философски осмыслить превращение бесконечномерной последовательности Фибоначчи в периодическую схему.

Без напыщенности, заклинаний и высокопарных мудростей.

Алгоритмическая процедура (2), по сути – это отсечение малого и пренебрежение большим. Когда малое в большом приобретает значимость.

В противном случае 1 в сумме с 10^{20} не имеет интерпретируемой самореализации.

Кстати в самой периодичности (на примере периода 60 в последовательности по mod 10, когда в обычном сложении сохраняется лишь младший разряд) также выявляется немало симметричных числовых форм, что само по себе уже интересно. Поскольку любые закономерности – свидетельство преемственности и косвенное обоснование для повышения уровня доверия к модели.

Только вот жаль, что нет единого представления одного и того же числа (события, формы, объекта) вне зависимости от систем счисления.

И как это выражает природа, мы точно не знаем. Можем только смоделировать в виде наших субъективных представлений, например 10 арабскими цифрами.

Остается надеяться, что слово "арабы" природе не чуждо.

В циферблатах Фибоначчи обнаруживаются интересные закономерности.

Особенно, поразителен одинаковый счет в прямом и обратном направлении.

Исходя из этого, можно переходить к взаимообратному протеканию многих физических законов по времени (в той же классической механике) с их повторяемостью и "возвращением в будущее". И хотя суммирование процедурно формируется стрелой времени только в одном направлении, мы его спокойно воспроизводим и в противоположном ходе.

Просто фантастика! – Как машина времени.

Феномен 24

Можно утверждать, что появление числа 24 в периодичности и на циферблате Фибоначчи (mod 9) закономерно обусловлено. Они связаны буквально органически.

Так что 24 – это знаковое число уникальной аддитивно-суммирующей рекурсии в ее представлении по модулю 9 на основе десятичной системы счисления.

Что же особенного в этом числе? – Если даже сутки человек разбил именно на 24 часа.

Оказывается, числа 12 и 24 играют центральную роль в математике, благодаря целой серии многих "совпадений", которые только сегодня начинают понимать в полной мере [4].

Константа 24 становится предметом отдельных пусть пока и не фундаментальных исследований [5, 6].

Для изложения последующего материала напомним сведения о числовых функциях.

Функция делителей[1] d натурального числа n определяется как сумма всех его делителей

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d .$$

---

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Divisor_function; http://mathworld.wolfram.com/DivisorFunction.html.

Урезанная функция делителей (restricted divisor function) – сумма делителей, кроме n:

$$s(n) = \sigma(n) - n.$$

Функция Эйлера с ее разложением в ряд Фурье [7] $\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \gcd(k,n) \cdot e^{-\frac{2\pi k}{n} i}$, равная количеству натуральных чисел, не больших целого $n > 0$ и взаимно простых с ним (A000010[2]), а именно $\{n\}$ = {35, 39, 45, 52, 56, 70, 72, 78, 84, 90}; gcd(k, n) – наибольший общий делитель (НОД), $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Небезынтересные 24 свойства числа 24.

1. Наименьшее составное число, имеющее 8 делителей (A005179): 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; $\sigma(n) = 60$, $s(n) = \sigma(n) - n = 36$.

2. Сильно-составное число: делителей больше, чем у любого натурального числа, которое меньше его самого.
   $2^3 + 4^2 = 24$ – сумма квадрата и куба,
   $2^3 + 2^3 + 2^3 = 24$ – сумма трех кубов,
   1+5+7+11=24 сумма чисел, не имеющих общих делителей с 12.

3. Полу-совершенное (semiperfect[3]) число, совпадающее с сумой некоторых (или всех) собственных делителей: 1+2+3+6+12 = 24, – за исключением 4 и 8.

4. Самое большое число, которое делится на все числа, меньшие корня из него.

5. Для любого простого числа $p > 3$ величина $p^2 - 1$ делится на 24 без остатка.

6. Имеется 10 решений (рис. 8) уравнения $\varphi(n) = 24$.

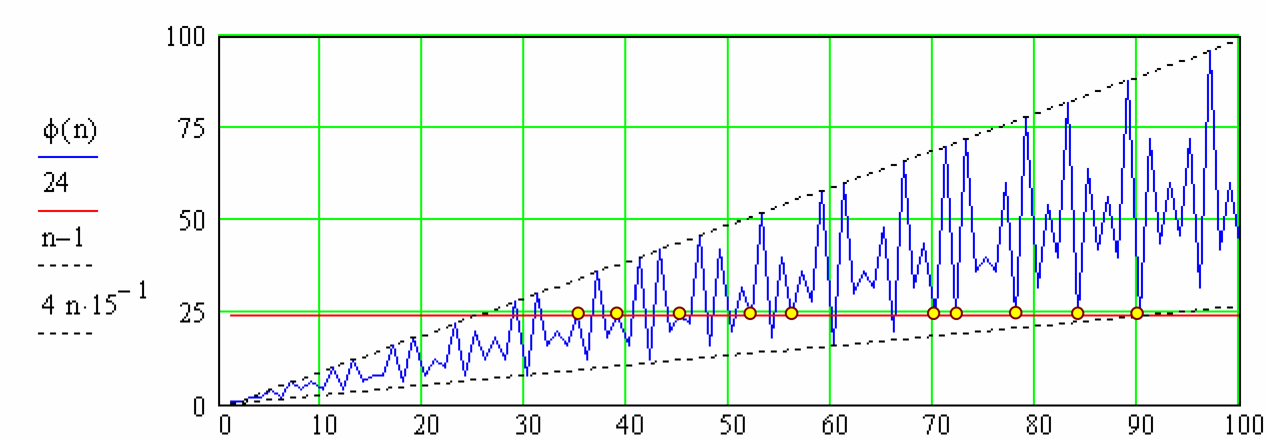


Рис. 8. График функции Эйлера с асимптотами

7. 8-е число Трибоначчи (A000073) $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$: 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, ... и 6-й член ряда Фибоначчи $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с начальными условиями (0, 3): 0, 3, 6, 9, 15, 24,..

8. 6-е триморфное число – число, десятичная запись куба которого оканчивается цифрами самого числа: **24**^{3} = 13 8**24.**

9. Факториал четверки: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

---

[2] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Semiperfect_number; http://mathworld.wolfram.com/PseudoperfectNumber.html.

10. Существует интересное свойство некоторых чисел и их целых степеней делиться нацело на сумму своих же цифр. Множества чисел n, степени которых от 1 до $k \geq 1$ кратны суммам их цифр S (а число n^{k+1} уже не делится нацело на сумму своих цифр), составляют отдельные последовательности. Число 24 является характерным для случая $k = 6$.

24^1=24	S(24) = 6 | 24 (читается как "6 делит 24");
24^2=576	S(576) = 18 | 576;
24^3=13824	S(13824) = 18 | 13824;
24^4=331776	S(331776) = 27 | 331776;
24^5=7962624	S(7962624) = 36 | 7962624;
24^6=191102976	S(191102976) = 36 | 191102976;
24^7=4586471424	S(4586471424) = 45 не делит 454586471424.

11. Сумма трех натуральных соседних чисел: 7 + 8 + 9 = 24. Это также сумма не треугольных чисел, расположенных между последовательными треугольными числами (6 и 10); последовательность A006002: 0, 2, 9, **24**, 50, 90, ... с формулой $n(n+1)^2/2$.

12. Сумма двух простых чисел-близнецов (twin prime[4]), отличающихся на 2: 11+13 = 24.

13. Число полу-меандр [8], A000682: 1, 1, 2, 4, 10, **24**, 66, 174, 504, 1406…

14. Избыточное (abundant[5]) число n, сумма положительных делителей (отличных от n) превышает n, то есть $s(n) = \sigma(n) - n > n$ (A005101): 1+2+3+4+6+8+12 = 36>24.

Оно же делится на сумму своих цифр (число Харшада[6]).

Имеет смысл также рассматривать подобные в других системах счисления.

Числа, которые являются числами Харшада во всех системах счисления, называются обобщенными числами Харшада. Их всего четыре (1, 2, 4, 6) и все они делители 24.

15. Имеет быть просто красивое числовое тождество (A003480):

$$\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^2} - \left(2-\sqrt{2}\right)^{2^2}}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = 24,$$

а также интересное тождество с четырьмя простыми числами 2, 3, 5, 7 (A004254):

$$\frac{\left(\frac{5+\sqrt{3 \cdot 7}}{2}\right)^3 - \left(\frac{5-\sqrt{3 \cdot 7}}{2}\right)^3}{\sqrt{3 \cdot 7}} = 24.$$

16. Произведение любых четырех последовательных чисел делится на 24.

Действительно, среди четырех последовательных чисел всегда имеются два четных числа, одно из которых кратно четырем. Кроме того присутствует число, кратное трем.

В итоге получаем $n(n+1)(n+2)(n+3) = 2k \cdot 3l \cdot 4m = (k \cdot l \cdot m) \cdot 24$.

17. Сумма первых 24 нечетных чисел есть 24 в квадрате. Хотя это свойство справедливо для любого натурального числа.

18. Девятиугольное число вида $n(7n - 5)/2$ – A001106: 0, 1, 9, **24**, 46, 75, 111, ...

19. Число 24 состоит из двух сомножителей 4·6, обладающих поистине уникальными аддитивно-мультипликативными свойствами

---

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime; http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimes.html.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Abundant_Number; http://mathworld.wolfram.com/AbundantNumber.html.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Harshad_number; http://mathworld.wolfram.com/HarshadNumber.html.

$$4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2, \qquad 6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Поэтому в своих проявлениях оно просто обречено быть основополагающим кирпичиком в моделях мироздания различными формообразующими структурами:

$$(1+2+3)\cdot(2+2) = (1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 2) = (1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2+2) = (1+2+3)\cdot(2\cdot 2).$$

Известна также гипотеза Томашевски: только числа 1, 6 и 120 являются одновременно и треугольными числами (то есть имеют вид $1 + 2 + \ldots + m$) и факториалами вида $1{\cdot}2{\cdot}\ldots{\cdot}n$.

И все они взаимосвязаны с 24: $6{\cdot}4 = 24 = 120/5$.

20. Сумма квадратов первых 24 натуральных чисел – есть идеальный квадрат $N^2 = 70^2$. Эта задача известна как "проблема пушечных ядер": квадратная пирамида пушечных ядер содержит квадратные число ядер только тогда, когда вдоль ее основания уложено 24 шаров! Поразительно, но $n = 24$ – единственное целое число (не считая 1) с этим свойством [9]!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

21. В теории музыки – 24 тональности, в греческом алфавите – 24 буквы, частота смены кадров в кинематографе – 24 кадра в секунду.

22. Число 24 присутствует в эта-функции Дедекинда [10] $\eta(\tau) = q^{24^{-1}} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - q^k\right)$, где $q = e^{2i\pi\tau}$ – стандартизованное обозначение в современной теории чисел, и обеспечивает связь с другими формами, например, модульным дискриминантом, решеткой Лича и др.

23. Теорема. $\tau_4 = 24$.

Оказывается, есть такая теорема, оригинальная запись которой приведена в [11].

Она определяет контактное число τ_n – наибольшее число непересекающихся и одинакового радиуса сфер в R^n, которые одновременно касаются еще одной сферы того же радиуса[7].

Так, на плоскости $\tau_2 = 6$, в трехмерном пространстве $\tau_3 = 12$.

В 1979 г. доказано, что $\tau_8 = 24{\cdot}10$ и $\tau_{24} = 196560$.

Последнее число отражает плотную упаковку шаров в 24-мерном евклидовом пространстве (решетка Лича) и само по себе обладает уникальными свойствами:

– удовлетворяет равенству[8] $n = \varphi(\sigma(\varphi(\sigma(n))))$;

– произведение первых шести чисел вида «два простых сомножителя минус 1»[9]

$$(2{\cdot}2-1)(2{\cdot}3-1)(3{\cdot}3-1)(2{\cdot}5-1)(2{\cdot}7-1)(3{\cdot}5-1) = (4-1)(6-1)(9-1)(10-1)(14-1)(15-1) = 196560;$$

– произведение двенадцатых членов последовательности[10] Якобса [12] $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ и Фибоначчи $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$$a_{12} \cdot f_{12} = 1365{\cdot}144 = 196560;$$

– $C_{12+3}^{3} \cdot 12^3 / 4 = 12^3 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 / 4! = 196560$;

---

[7] Другое определение: *контактное ч.* – наибольшее число точек, которые можно расположить на единичной сфере S^{n-1} в R^n так, чтобы угловое расстояние между любыми двумя из них было $\geq 60^{\circ}$.

[8] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/A067883.

[9] Там же. – A112228, A001358.

[10] Там же. – A001045, A000045.

– число, которое можно представить в виде разности квадратов простых чисел $x^2 - y^2$ точно десятью способами

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	449	491	499	563	631	821	2477	3793	7027	12289
y	71	211	229	347	449	691	2437	3767	7013	12281

– наименьшее составное число $a(n) > 0$, имеющее больше делителей, чем $a(n-1)$: последовательность A143176: ... 83 160, 138 600, 196 560, 302 400, 277 200...;

– 12-й триплет $\sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) = x + y + z =$ 57420 + 69030 + 70110 = 196560.

24. Удивительное проявление 24 можно увидеть в формуле-прозрении Рамануджана в оценке числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые.

Так, $p(4) = 5$, поскольку $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$.

При больших значениях n величину $p(n)$ можно оценить согласно теореме Харди-Рамануджана по приближенной формуле [14, с. 63]

$$p(n) = \left\lceil \frac{e^{\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)}}}{2\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n - \frac{1}{24}\right)} - \frac{1}{2\left(n - \frac{1}{24}\right)^{3/2}} \right) \right\rceil,$$

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Эта приближенная формула поразительно точна.

Например, она дает верный ответ $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$.

Но самое загадочное в формуле – это поправка 1/24. Ни её автор Рамануджан и никто другой так и не сумели объяснить, откуда она появилась.

«Такую догадку нельзя назвать иначе как гениальной. Во всём этом есть что-то почти сверхъестественное», – писал позже английский математик Литлвуд, обычно весьма сдержанный в своих оценках [15].

Обсуждая феномен числа 24 и его значительную роль в математике, напомним еще один весьма значимый факт ... про его половинку.

Дж.Н.Манси доказал (1913), что наименьший магический квадрат (МК) из последовательных нечетных простых чисел должен иметь порядок 12 с магической константой 4514, и заполнил такой квадрат 144-мя первыми нечетными простыми числами (с учетом 1, но исключая единственное четное простое число 2) [16]

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Заметим, что число 2 нельзя вписать ни в один МК, составленный из разных простых чисел. Дело в том, что сумма чисел в строке или столбце, на пересечении которых находится число 2, отличалась бы по четности от суммы чисел в остальных строках и столбцах [17], и квадрат не был бы магическим.

Литература.

1. *Бычков С.Н.* Как числа превращали в химеру. – http://www.numbernautics.ru/content/view/633/48.
2. *Василенко С.Л.* Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15756, 17.01.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161603.htm.
3. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Fibonacci(n) mod 10 – http://www.research.att.com/~njas/sequences/A003893.
4. 24 (number). From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/24_(number).
5. *Аракелян Г.* 24 – число природы. – http://www.numbernautics.ru/content/view/568/62/.
6. *Baez J.* My favorite numbers: 24. – 19.09.2009. – http://math.ucr.edu/home/baez/numbers/24.pdf.
7. *Schramm W.* The Fourier Transform of Functions of the Greatest Common Divisor // Electronic J. of Comb. Number Theory, A50, vol. 8(1), 2008. – http://www.westga.edu/~integers/cgi-bin/get.cgi.
8. *Michael La Croix.* Approaches to the Enumerative Theory of Meanders. – 29.09.2003. – http://www.math.uwaterloo.ca/~malacroi/Latex/Meanders.pdf.
9. *Weisstein E.W.* Cannonball Problem. – From *MathWorld*. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/CannonballProblem.html.
10. 2*Weisstein Eric W.* Dedekind Eta Function. From *MathWorld*. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/DedekindEtaFunction.html.
11. *Мусин О.Р.* Проблема двадцати пяти сфер // *УМН*, **58**:4(352), 2003, 153–154. – http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=rm&paperid=651&what=fullt&option_lang=rus.
12. *Weisstein Eric W.* Jacobsthal Number. From *MathWorld*. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html.
13. *Слоэн Н. Дж. А.* Упаковка шаров // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82. – http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Spheres.htm.
14. *Жуков А.В.* Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
15. *Левин В.И.* Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – http://www.ega-math.narod.ru/Rama/Rama2.htm.
16. *Гарднер М.* Математические досуги: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 496 с.
17. *Макарова Н.* Нетрадиционные магические квадраты из простых чисел. – http://natalimak1.narod.ru/netrpr.htm.