С.Л. Василенко

Геометрические узоры и приволья Вселенной

Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу,
за которой скрыто наше будущее...
Д.Гильберт (1900)

Такими словами начинался знаменитый доклад 38-летнего немецкого ученого Давида Гильберта, в котором он выкристаллизовал знаменитые и разноплановые 23 математические проблемы и доложил в 1990 г. на 2-м Международном конгрессе математиков в Париже.

– Вань, а Вань? Париж далеко от Урюпинска?
– Ну ... где-то 3000 километров.
– Хм... все-таки не дружат с головой эти ученые:
попёрлись на конгресс ... в такую глухомань!?

С тех пор много воды утекло.

Математика еще больше окрепла, похорошела, стала взрослее, степеннее.

Однако местами остается по-женски капризной. А иногда на ней столько макияжа, что сразу и не признаешь. Наряды стала примерять умопомрачительные.

Но по-прежнему остается всегда юной, обаятельной и потому желанной всеми учеными и не очень: от м*а*ла до вел*и*ка.

Всем она отвечает взаимностью, хотя так и не отдала никому свое сердце и не стала физико-математической принцессой, как бы ее не обхаживали физики и лирики.

Давид Г. ее тоже всегда любил.

И может даже больше чем кто-либо. Потому как знал её со всех сторон.

Для него она была одно целое.

А если и позволял себе как-то делить на отдельные части-области, то чисто условно (без выпуклых форм) и для лучшей понятливости в кругу профи-единоверцев.

После его формулирования проблем сразу выяснилось, что некоторые из них уже решены или близки к решению. Но остальные еще долгое время будоражили умы не одного поколения математиков. А две из них до сих пор не решены: о нулях дзета-функции Римана (№ 8 – проблема простых чисел) и о предельных циклах (№ 16 – топология алгебраических кривых и поверхностей).

– Да. Все-таки в двойке есть что-то сакрально-мистическое.

Взять квадратуру круга, иррациональность корня из двух, трансцендентность двух в степени корня из двух и проч.

Даже здесь у Давида Г., когда $8 = \mathbf{2}^3$ и $16 = \mathbf{2}^4$. Да и по **2**-й (о непротиворечивость аксиом арифметики) пока нет консенсуса.

Прямо наваждение-суеверие. Будто кто-то специально водил рукой Гильберта, распределяя самые заковыристые на "двоечные" места-позиции.

А четвертая ($4 = \mathbf{2}^2$), с которой связаны наши последующие рассуждения, волею судьбы тоже не отнесена к решенной проблеме. Она сообразуется с нечеткой или неоднозначной постановкой и считается слишком расплывчатой.

Гильберт без адвокатов, но с единомышленниками. Отметим, что Д. Гильберт досконально не формулировал выдвинутые им для математического сообщества проблемы.

Их изложение преподнесено в форме доклада и больше похоже на рассуждения с целью выработки общих положений для последующего изучения математических дисциплин и решения вопросов, «как бы на пробу ... исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки».

Напомним, что выбирая тематику для сообщения, он придерживался трех основных принципов и говорил, что задача должна быть: понятной (должно быть ясно, откуда она возникла); достаточно трудной, чтобы вызвать интерес, и не настолько трудной, чтобы ее невозможно было решить [1].

Среди 23 математических проблем три относятся к геометрии (в порядке номеров):

3 – равносоставность равновеликих многогранников;

4 – *перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими*[1];

18 – конечность числа кристаллографических групп; нерегулярные заполнения пространства конгруэнтными многогранниками; наиболее плотная упаковка шаров.

Четвертая проблема фактически сводится к исследованию поведения прямых как кратчайшем соединении двух точек в искривленных пространствах.

Отметим, что Гильберт, прежде всего, придавал большое значение доступности и понятности математики и часто приводил слова другого математика: «Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда ты сделал ее настолько ясной, что берешься изложить ее содержание первому встречному» [1].

Именно поэтому математики любят подшучивать над собой и окружающими.

Например, В. Арнольд свою публичную лекцию начинал с образной классификации наук [2] по законам Мерфи: «Если воняет, то это химия, когда ничего не работает – физика, а если понять нельзя ни слова – математика».

Английский математик и почетный член АН СССР (1934) Г. Харди высокопарные слова К. Гаусса "математика – королева наук" занимательно объяснял ... полной бесполезностью обеих.

Директор Математического института (Бонн) уже в наши дни писал, что математика – это формализованное переливание из пустого в порожнее. А её вклад в решение основной проблемы человечества состоит "в отвлечении лучших умов от более опасных, чем математика, занятий". «Истинная же польза» – по его словам – в том, что если бы вместо проблемы Ферма математики занимались бы усовершенствованием автомобилей или самолетов, то вреда было бы гораздо больше» [2].

Тем не менее, математика хотя и не воздействует мгновенно и непосредственно на технический прогресс, который ежедневно ощущает каждый человек, но через другие науки ее влияние невозможно переоценить.

А любое исследование только выигрывает от того, если его начинать с красивой и понятной математической теории, которая «обязательно окажется прекрасной моделью важных физических явлений» (П. Дирак).

Особое мнение[2]**.** Как мы увидим ниже, не все придерживаются этих, можно сказать, заповедей (Гильберт, Дирак).

Рассматривая геометрию Вселенной в разрезе 4-й проблемы Гильберта, некоторые американские господа наоборот "напускают туман" на свои очевидные формульные преобразования до такой степени, что голова идет кругом от ее запрокидывания, дабы узреть нимб-ореол значимости результата.

Хотя на поверку потом выходит обычное, если не сказать банальное масштабирование, например, с ... заменой основания логарифма. Допустим натурального логарифма – на десятичный аналог. Понятно, результирующее число изменяется, но "денег от этого не становится больше".

И такой тривиально-математический кульбит преподносится под соусом, будто остальные ученые мира более века его просто прозевали-проспали. Ну, а эти профессора, получается, вот увидели. Весьма интересно... И есть смысл познакомиться чуть ближе.

---

[1] Обобщение понятия "прямая линия" в искривленных пространствах: прямые на плоскости, винтовые линии на круговом цилиндре, большие круги на сфере и т.п.

[2] Название фантастического американского фильма Стивена Спилберга *Minority Report* буквально означает заявление или мнение меньшинства

Доктор физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки России, академик Российской академии естествознания, С.Х. Арансон*[3], в роли адвоката проф. А. Стахов*[4].**

В работе [3] мы обратили внимание на робко-пренебрежительное упоминание этих двух уважаемых ученых в работах [4, 5] своего бывшего соотечественника – выдающегося геометра 20 века академика А. Погорелова – с фактическим принижением русской (российско-украинской) математической школы.

Сочли возможным допустить, что демонстративное принижение его вклада в решение 4-й проблемы Гильберта было сделано не умышленно, а скорее ошибочно, считая это простым упущением авторов, за которым могут последовать их извинения и воздание должной дани уважения русскому математику.

Ответ не заставил себя ждать [6].

Прежде всего, в нем неоднократно подтверждена незаурядная роль нашего соотечественника А. Погорелова, чего не было в предшествующих работах, и уже это не может не радовать.

Собственно это и было главным предметом критики.

Кроме того, автор достаточно подробно и, можно сказать, в научно-популярной форме охарактеризовал вклад А. Погорелова в решение проблемы. Весьма убедительно и аргументировано показал его сильные и слабые аспекты в доказательной базе.

Правда мы не получили ответа на расширение квадратного уравнения до двух степеней свободы (коэффициентов), – но это, как и презумпция невиновности, является законным авторским правом: комментировать или нет, на свое усмотрение.

Можно было бы на этом поставить и точку.

Не считая мелких шероховатостей, стороны в целом здесь пришли к согласию.

Реноме А. Погорелова восстановлено, а "играть в геометрию" мы не собирались.

Нет же. – Вдруг, откуда не возьмись, появилось ... вездесущее брюзжание адвоката с вытаскиванием покрывшегося плесенью лексикона из ряда: «измышлизмы, плагиат, непрофессионализм, вранье, введение цензуры-рецензирования...» (см. блог по ссылке).

Реагировать на подобную "голословную чушь из-за угла" – пустая трата времени.

Ну, а с другой стороны, если в оппоненте проснулся и прямо-таки выпирает неистовый инстинкт цепляния, почему бы и не удовлетворить "их неймется".

– Например, дать наше видение, но теперь уже исключительно о сути и значении его работ непосредственно по проблеме Гильберта, – а она того заслуживает.

Только в противовес межличностным оценкам континентально-инопланетного характера и без всякой к ним адаптации, текст и стиль нашего изложения должным образом и максимально отдалить от тезы "сам такой", построив на антитезе "совсем не такой".

Вполне корректный, предметный и научный подход.

Итак, сага по-американски. Поскольку диспозиция неожиданно превратилась в дислокацию, несколько стоп-кадров придется все-таки прокрутить еще раз назад.

1. Признание С. Арансона достойно искреннего к нему уважения и мы выражаем за это наши симпатии. Но давайте чуть-чуть приоткроем занавес будущего. Через считанные месяцы его статья станет отдельным самостоятельным объектом в океане научных публикаций, и уже без системной связи с теми первыми двумя, где А. Погорелову в*о*время так и не нашлась хотя бы пара заслуженных и теплых слов. Здесь образ пословицы «хороша ложка к обеду» непроизвольно берет верх и невольно создает благодатную почву для более обстоятельного анализа работ [4, 5], только уже по сути изложения проблемы.

---

[3] Именно так просят себя величать господин С. Арансон в своей работе [6], что мы и делаем с превеликим удовольствием.

[4] На узурпированном блоге http://goldensectionclub.blogspot.com/ временно поверенный адвокат не скупится на определения в адрес своего соавтора: "великолепная статья", "высочайший уровень профессионализма", "блестящий ответ", "новое решение 4-й Проблемы Гильберта". Эпитеты явно гиперболизированы, хотя в целом статья действительно добротная и в меру объективная.

2. Оставляя и преумножая еще раз все теплые слова профессору С. Арансону (см. п. 1), которые по-прежнему остаются незыблемыми, все же никак не укладываются в голове его заключительные мысли, вброшенные им искрометными абзацами в абстрактно-геометрические пространства с нимбом инопланетян.

(а) Надо полагать, снизошедшее вдруг гипертрофировано-высокое мнение о собственных исследованиях приподняло и возвысило настолько, что он не преминул небрежным жестом смахнуть наработки и исследования других авторов в корзинку (урну) «дилетантских, пустых и непрофессиональных статей, публикуемых на сайте Академии Тринитаризма» [6]. – А сами, то где напечатались, на обратной стороне Луны?

Воистину: вот тебе, бабушка, и Самуилов день!

Придется напомнить уважаемому (уже на 99,9 %) академику РАЕ (не путать с РАН), что математика «по природе демократична: ее демократизм обусловлен характером математических истин. Их непреложность не зависит от того, кто их провозглашает, академик или школьник» [7]. Математика не признает абсолютных авторитетов и в ней все равны: от академиков действительных и даже кучи-тьмы "нарисованных" академий до учащихся действительных и виртуальных (вроде закрытых на карантин) школ.

(б) А критику он готов выслушивать только от "серьезных[5] исследователей".

Что сказать на это? – У нас, например, есть родственник со слуховым аппаратом, но ему и в голову не приходит мысль экономить на батарейках, и он рад любому общению и слушателю. – «Фарадей первым организовал публичные научные лекции для слабоподготовленных слушателей, и они были замечательными» [2]. Многие выдающиеся и всемирно известные математики и сегодня собирают аудитории школьников и студентов на общественные лекции и весьма радуются, когда новые идеи находят благодарного слушателя, а в особенности – если еще и с критикой, когда оттачиваются новые мысли.

Но проф. С. Арансон красит мир черно-белыми красками, где кругом в основном дилетанты. И это вызывает лишь сочувствие.

Где и когда Вы видели, что бы Вас понимали серьезно в смысле полноты высказываний? – В лучшем случае процентов на 20, и то хорошо.

А самым *серьезным исследователем* для всех нас будет только патологоанатом.

Вот только выслушивать его придется уже не нам, а другим.

Так что, уважаемый г-н Арансон, приходится вежливо считаться со всеми исследователями. Да и не Вам судить об их серьезности. Для этого есть Читатель и научная общественность. Выходит, позлили Вы нас чуток, еще больше повышая интерес к Вашим серьезным исследованиям (?). – А иначе и быть не может, когда за ними стоит имя Гильберта, а впереди академик РАЕ (не путать с РАН).

(в) Но будут ли восприняты наши слова адекватно, если для него: «*Полемики по существу нет*, потому что *не с кем полемизировать*», и в то же время «скучно тратить драгоценное время на *бесконечные дискуссии*» [6].

3. Отдельно и несколько слов о Международном Клубе Золотого Сечения, а вернее его узко-клановом (во всяком случае, пока) блоге[6], на котором по задумке должна публиковаться информация о деятельности клуба. А де-факто выставляется информация о статьях АТ (а не только упомянутого клуба), которая в отдельных случаях густо-густо посыпается ... откровенной бранью. Наверняка многие помнят поучительную передачу "Сам себе режиссер". Есть и другие похожие ассоциативные образы, например "Театр одного актера", "Голый король" и т.п.

Так это все отсюда. От себя, для их же рекламы, добавим: "Блог по ловле блох".

---

[5] Слово "серьезный" имеет достаточно много синонимов на выбор: нешуточный, обстоятельный, основательный, солидный и др.

[6] http://goldensectionclub.blogspot.com // *Стахов А.П.* О новом блоге «International Club of the Golden Section» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15401, 14.07.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011050.htm.

Никаких тебе сторонних комментариев-высказываний (теперь надо полагать появятся), никаких других отзывов (отныне вероятно пойдут косяками по кастово-партийной принадлежности), никаких инакомыслий (теперь возможно родятся "на заказ").

И такое еще впечатление, что на американском континенте никогда не спят: не успела на нашей статье высохнуть типографская краска, как уже через два дня появляется не только ответная статья [3], но и два обширных комментария (см. упомянутый блог от 1.12.2009 г.).

Например, там можно узреть запоздалые слова-оправдания они же упреки: «Василенко выдвигает очередное необоснованное обвинение против меня и проф. Арансона по поводу того, что мы якобы ввели в заблуждение научную общественность, утверждая, что мы решили 4-ю Проблему Гильберта»[7].

Так *якобы* или *не якобы*? Где же правда?

– Действительно академик РАЕ американец С. Арансон в своих оценках более или менее корректен. Он утверждает, что «метрические λ-формы плоскости Лобачевского... являются важным вкладом (!) авторов в решение 4-й проблемы Гильберта» [5]. Хотя тоже часто сбивается. То исследование у него «является нашим оригинальным решением 4-й проблемы Гильберта», то спохватившись через абзацы: «Мы же нигде не говорим о том, что у нас получено абсолютно полное и законченное решение этой проблемы» [5].

Эдакая нерешительность между выбором "быть умным и ... очень умным".

Но вот риторика канадского профессора А. Стахова буквально меняется на глазах, что называется до неузнаваемости, и мы читаем:

– «...это оптимистическое заявление подтверждается решением 4-й Проблемы Гильберта, полученным Алексеем Стаховым и Самуилом Арансоном» [8];

– «решение 4-й проблемы Гильберта, изложенное в [4], является подтверждением этого вывода ... Именно в силу "специфичности" 4-й проблемы Гильберта, которая в течение целого столетия не поддавалась решению (?) и поэтому названа математиками «весьма расплывчатой для получения определенного ответа», ее оригинальное решение, полученное в [4], весьма неожиданным» [9]. – Не находим в конце глагола, хотя и так все понятно.

Согласитесь "сделать вклад в решение" и "решить" – совсем не одно и то же.

Так, что получается "не якобы", а действительно предпринимаются попытки ввести научную общественность в заблуждение. Но это не обвинение (мы не прокуроры), а только замечание на тему корректности в изложении. Дополнительные комментарии излишни.

Только отметим еще, что работы [4, 5] уже написаны одним автором. – Это важно.

Фаренгейт–Цельсий. Все время жить по шкале Цельсия, и потом очутиться "в лапах Фаренгейта", где постоянно на 112 градусов больше, невольно "закипишь".

Почему же аксакалы хмурят брови? – А на это есть причины.

Прежде всего, по-моему, это боязнь потерять построенные собственными руками воздушные замки. А также выкрашенную "бронзовость". – Но это отдельная тема.

Вернемся к геометрическим узорам. После публикации их первой работы (о 4-й проблеме Гильберта) скоро исполняется 1,5 года, но никто до сих пор не обратил на неё внимания. Такое молчание как бы дает карт-бланш на общественное согласие, а у авторов возникает асимметрично-неадекватное представление о собственной значимости и глубокое верование в то, что они действительно решили. Поэтому можно помочь им осмыслить и разобраться, по сути опубликованного материала, попытавшись поставить ему максимально точный диагноз, – безусловно, субъективный, без претензий на всеобщность. – Но все ж.

Тем более, этот вопрос у них связан с теоретическим приложением квадратного уравнения в его разностно-рекуррентной интерпретации, и в какой-то мере – с его частным случаем в виде золотого сечения (ЗС). Причем не так, как часто бывает, что его и под микроскопом не видно, а вполне на легальном, солидном и достаточно высоком научном уровне и в явной форме. Возможно, это и есть настоящая истина теории Фибоначчи, где ЗС,

[7] http://goldensectionclub.blogspot.com/

если хотите, уникальный, но редчайший и случайный эпизод, к которому в виду простоты его идентификации человек подошел вплотную еще в глубокой древности.

Ширина в длину или длина в ширину. Следующий этап начнем … не с самого начала, а как говорится "с легкой разминки", чтобы потом избежать ненужных и малопродуктивных фальстартов.

В статье [3] со ссылкой на Большой Российский энциклопедический словарь в термин гониометрии (греч. *gonia* угол и ...метрия) нами вложено ключевое понятие как способа определения или измерения углов.

Видимо, желая продемонстрировать свою эрудицию, доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный деятель науки России, академик РАЕ американец С. Арансон приводит определение: «Гониометрия – часть тригонометрии, определяющая тригонометрические функции и соотношения между ними» [10], после чего многозначительно добавляет: «а не только часть геометрии, в которой рассматриваются лишь способы измерения углов».

Что можно сказать по этому поводу?

Налицо прилипчивые или приставучие отголоски характерных особенностей в типично-специфической "узколобости" (не путать с понятием мышления) ряда профи-математиков, которые часто не видят ничего кроме своего объекта, оторваны от реалий многообразия природы, основательно подзабыли философию, перестали ходить в театры, в периодике читают последнюю страницу, а научную информацию черпают в основном из Википедии[8].

Неспециалисту понятно, что способы измерения (оценки) углов – более широкое понятие, чем тригонометрические функции – как один из методов (инструментариев) идентификации угловых величин. Помимо которых могут быть иные методы и техники: специальными инструментами типа транспортира, по звездам, с помощью тригонометрических формул, посредством алгебраических и иных вычислений. В конце концов, – простой визуальной оценкой "на глаз", когда, например, опытные водители могут установить угол подъема с точностью до градуса (кстати, со спуском почему-то обычно сложнее).

И все это характеризуется одним емким словом "способы", включающее методы и приемы (для достижения чего-либо), действия или системы действий (по Ожегову)

Таким образом, в широком смысле гониометрия – это не только тригонометрия, а более пространное словообразование-понятие, предметом которого являются углы и способы их определения (измерения, оценки, вычисления и др.). В специфически узком понимании, можно ограничиться и представлением по энциклопедии И. Виноградова.

Поэтому, определения и термины в этом контексте нужно не противопоставлять друг другу, как это делает профессор, академик РАЕ и Заслуженный деятель науки России американец С. Арансон, а сближать (гармонизировать) на общей подоснове, характеризуемой понятием "углы", – с набором конкретных способов определения, в том числе с использованием теоретических наработок тригонометрии.

Угол в 60^o для равностороннего треугольника можно найти, даже не зная или привлекая само слово или учебник "тригонометрия", на основе алгебраической геометрии: $180/3=60$.

Для разминки, пожалуй, достаточно и можно перейти к более детальному изложению.

Сначала попытаемся выяснить, хотя бы в общих чертах суть или "формулу успеха", снизошедшую в светлые головы и озарившую научные умы в решении известной проблемы.

[8] Википедия – свободная общедоступная on-line-энциклопедия, которую может редактировать каждый. Ни одна статья в ней проходит формального процесса по экспертной оценке. Весьма полезный справочник и инструментарий для первоначального беглого знакомства с проблематикой, к которому мы тоже частенько прибегаем. Но как исследовательский инструмент является некорректным и безответственным. Часто содержит ошибки, дезинформацию и т.п. В то же время проект достаточно мобилен в корректировке. Так что "доверяй, но проверяй".

Кот в мешке. Анализируемые статьи не относятся к разряду лаконично построенных. Много отвлекающих, порой лишних маневров на ранее изложенные темы, когда достаточно ограничится ссылкой или, на худой конец, цитатой.

Докопаться до сути совсем непросто. А найти изюминку – так и совсем.

Можно понять не только среднестатистического, но и основательно подготовленного читателя, у которого по мере прохождения подобного чтива невольно пропадает интерес.

Справедливости ради отметим, что статья [6], хотя и написана на скорую руку, довольно лаконична, весьма обстоятельна, а главное – без потери сущностной основы.

Тем не менее, подробное ознакомление с общим содержанием не вносит кардинальных изменений в выбранную человечеством кошачью образ-тему, и отправной "кот в мешке" превращается в ... "черную кошку в черной комнате, когда её там нет". Но все по порядку.

Итак, авторами развивается идея *метрической формы плоскости Лобачевского* в псевдосферических координатах $0 < u < \infty$ и $-\infty < v < \infty$ с гауссовой кривизной $K = -1$.

Известна как интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере.

Её классическая модель обычно задается выражением

$$d^2 s = d^2 u + \mathrm{sh}^2 u \cdot d^2 v, \tag{1}$$

где ds – элемент длины, $\mathrm{sh}\, u$ – гиперболический синус, играющий определяющую роль в плоскости Лобачевского.

Новые метрические формы представляются [4, 5] в тех же координатах u, v

$$d^2 s = \ln^2 \lambda \cdot d^2 u + \frac{4 + p^2}{4} \mathrm{Sh}_\lambda^2 u \cdot d^2 v, \tag{2}$$

где λ – корень квадратного уравнения $x^2 = px + 1$; коэффициент $p \in R^+$;

R^+ – множество положительных вещественных чисел.

$\mathrm{Sh}_\lambda u = \dfrac{\lambda^u - \lambda^{-u}}{\sqrt{p^2 + 4}}$ – нижняя огибающая линия непрерывной функции Фибоначчи для разностного уравнения $x_{2+u} = px_{1+u} + x_u$.

Заметим, что зависимую переменную $\mathrm{Sh}_\lambda u$ проф. А. Стахов решил называть гиперболической функцией Фибоначчи. Хотя уже для квадратного уравнения общего вида, не говоря уже о более сложных последовательностях (Трибоначчи и др.), она физически не реализуется и математически не записывается. В то же время огибающие линии прекрасно воспроизводятся в геометрической и алгебраической форме.

При любом $\lambda > 0$ каждая из метрических форм (2) изометрична классической метрической форме Лобачевского (1) [6].

Авторы не детализируют, но мы поясним, откуда берется в (2) множитель $\left(4 + p^2\right)/4$.

Все просто. Он вводится для "подгонки" под вымышленную конструкцию $\mathrm{Sh}_\lambda u$:

$$\frac{4 + p^2}{4} \mathrm{Sh}_\lambda^2 u = \frac{4 + p^2}{4} \left(\frac{\lambda^u - \lambda^{-u}}{\sqrt{p^2 + 4}} \right)^2 = \left(\frac{\lambda^u - \lambda^{-u}}{2} \right)^2 = sh_\lambda^2 u \, .$$

Освободившись от лишних пут, вместо (2) получаем метрическую форму

$$d^2 s = \ln^2 \lambda \cdot d^2 u + \mathrm{sh}_\lambda^2 u \cdot d^2 v \tag{3}$$

с привычной стандартной формой гиперболического синуса $\mathrm{sh}_\lambda u$, только с основанием λ.

Но удивительно другое! – В системе доказательств и всего изложения материала (касательно проблемы Гильберта!) мы не находим ни одного особого свойства числа λ, которое бы позволяло нам конкретно показать его преимущества перед остальными.

А значит, нам абсолютно ничего не мешает поступить просто: с самого начала в качестве λ произвольно выбрать любое положительное число.

Собственно и все. Или вся "формула успеха", озарившая профессорские умы.

Но под это дело ими наводится разного рода туман, напускается дымок и распускаются кружева-марева. – В виде надуманных металлических[9] пропорций. Еле-еле вытягивающей на само "название формулы" Газале. Не менее надуманных гиперболических функций Фибоначчи–Люка (на месте обычных огибающих). И другой малополезной числовой дребедени (в смысле мелкоты, – на правах "подтанцовки"), не имеющей маломальского отношения к сути рассматриваемой проблемы Гильберта и геометрии Лобачевского.

Хотя сами по себе выкладки "имеют место жить".

Ведь никто ж не назовет неправильным, если мы заполним, скажем, 30 страниц, подряд идущими числами натурального ряда. И такие выкладки "имеют место жить"!?

Но не будем торопить события и плавно двинемся дальше. Благо Вселенная велика и разнообразна. Как и её геометрия. Был бы циркуль подходящий.

А ларчик просто открывался.

– Эта же проблема ... не имеет решения.

– Мы сами знаем, что она не имеет решения. – Мы хотим знать, как ее решать.

– Как-то ты странно рассуждаешь... Как же искать решение, когда его нет? Бессмыслица какая-то....

– Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица – искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступить с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос... (*А. Стругацкий, Б. Стругацкий*).

Изменим ракурс. Картина практически не меняется. Все так же профессоры ходят вокруг очевидного вопроса загадочными кругами.

Придают ему многозначительность. Запускают эфиры. Водят за нос заумной терминологией. Чуть ли не взывают к духу ... Фибоначчи.

А ведь можно иначе. Достаточно вспомнить еще раз, как Гильберт призывал создавать и излагать теорию настолько ясно, чтобы ее смысл можно изложить первому встречному [1].

Вот у братьев Стругацких философия не из легких. – Там еще нужно попотеть и много раз почесать затылок, чтобы разобраться и все-таки найти решение ... которого нет.

А здесь с самого начала на пол странички можно объяснить всё простым и понятным языком, не пряча в обертку математических выкрутасов и не напуская формульной дымки.

Да и суть всех объяснений – буквально в двух строчках. – Судите сами.

Берем произвольно число > 0, например π, без какого-либо упоминания о Фибоначчи.

Записываем модифицированный гиперболический синус по основанию π

$$\mathrm{sh}_\pi u = \frac{\pi^u - \pi^{-u}}{2},$$

и далее – модификацию метрической формы Лобачевского $d^2 s = \ln^2 \pi \cdot d^2 u + \mathrm{sh}_\pi^2 u \cdot d^2 v$.

В с е !

Да, опять эта "каверзная двойка" выскочила.

Вынуждены принести извинения: получилось не 2, а 2^2 строчки.

Плюс одна на слово "Все". Итого – 5.

Еще бы копнуть чуток, наткнуться на корень, и вышли бы на число золотого сечения

---

[9] В виду произвольно-условного и даже волюнтаристического наделения множества корней обычного квадратного уравнения вольной конструкцией типа "металлических пропорций", ничего не остается, как в данном контексте считать вполне уместным употребление не менее вольно-условной синонимической серии: шарикоподшипниковые, металлургические, вагонеточные, кастрюльные, сталеплавильные и т.п. пропорции. В отдельных случаях им вторят уже овощные или фруктовые прилагательные признаки типа: хреновые, бобовые, банановые и др.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{2^2+1}}{2}.$$

Зато как все замечательно: безо всякой ширмы или фона в виде функций Фибоначчи, шарикоподшипниковых пропорций, квадратных уравнений, формулы Газали и т.п.

Но тогда невольно возникает естественный вопрос или в задаче спрашивается: разве Гильберт имел в виду подобное банально-азбучное математическое действо?

Он что, не знал этих изоморфных преобразований?

> «Изоморфизм двух математических структур – это взаимно-однозначное соответствие между совокупностями элементов первой структуры и второй структуры, сохраняющее определенные на этих структурах операции и отношения» «никакая система математических аксиом никогда не определяет какую-либо структуру однозначным образом, а в лучшем случае — с точностью до изоморфизма. Мы говорим "в лучшем случае", поскольку бывают и весьма важны системы аксиом, определяющие класс неизоморфных структур. Например, аксиомы теории групп...». [11].

Может ли такое действо быть признанным за решение проблемы Гильберта?

Не беремся пока судить строго. Но даже на интуитивном уровне 11-го класса убежденно утверждается чувство сопричастности к происходящему, когда по современным меркам здесь отдает банальной операцией, – нечто вроде масштабирования.

Но то, что Фибоначчи, металлические фурнитуры или путанные гиперболические лабиринты здесь не при делах, вполне очевидно сразу.

Смотрим еще раз на записи (1) и (3), минуя надуманный формулоид (2), и вспоминаем слова русского математика В. Успенского: «Подлинно глубокое математическое понятие или математическое утверждение должно быть в своей сути просто. А тогда есть надежда, что оно окажется понятным, (или, лучше сказать, понятым): ведь к простому легче привыкнуть, а мы не знаем иного толкования для "понять", чем "привыкнуть"» [11].

Для лучшего привыкания и адаптации, рекомендуем нашим чтимым профессорам с континентальной Америки прочитать еще раз от слова "Берем" до слова "Все" и ответить для себя (нам уже все ясно) всего лишь на один вопрос: «Уважают ли они своего читателя или он для них есть лакмусовый материал-индикатор с целью проверки степени вздора?».

***Made by Sovetico in America. Guarantees minimum*.**

1) Итак, мы воочию убедились, что в работах [4, 5] ничего не изменится (с точки зрения обсуждения проблемы Гильберта), если в (3) вместо числа λ использовать любое другое положительное число на вещественной оси. А это означает, как говорят в народе, "притягивание за уши" системы ГФФЛ. Можно просто вместо основания натурального логарифма e задаться любым произвольным положительным числом и строить далее геометрию. Но в том-то и дело, что такая "тривиальная замена" явно не проходная в качестве решения проблемы Гильберта.

Потому и "туманят" читателя добротными идеями Фибоначчи, – авось пройдет.

Напомним, что в 1970 г. российский математик Ю. Матиясевиче успешно решил 10-ю проблему Гильберта, завершив доказательство алгоритмической неразрешимости задачи о существовании решений у произвольного диофантового[10] уравнения (ДУ) тем, что *он предъявил* 10 ДУ первой и второй степени, которые задают условие $b = F_{2a}$, где F_k – k-ое число Фибоначчи [12]. То есть у него числа Фибоначчи – непосредственные участники и адвокаты доказательной базы. Без них проблема Гильберта просто не разрешалась.

---

[10] Диофантово уравнение (уравнение в целых числах) – это уравнение с целыми коэффициентами и неизвестными, которые могут принимать только целые значения (положительные, отрицательные, нуль). Они названы в честь древнегреческого математика Диофанта [http://ru.wikipedia.org]. Проблема их решения хорошо известна. Например, уравнение $2x-2y=1$ не имеет решений в области целых чисел, так как его левая часть всегда является четным числом. Уравнение $3x=6$ имеет единственное решение $x=2$. Некоторые другие уравнения имеют конечное число решений и т.д.

И пока это единственное решение на сегодня.

А что мы имеем в статьях [4, 5]? – Фибоначчи для них – просто щит, которым пытаются прикрыть наготу написанного.

Или мы дальтоники? Ведь автору [6] же грезится только ему проявляющееся видение, как с его геометрией «открываются ... перспективы в развитии настоящей науки и фундаментальных исследований».

Очень даже. – Не исключено. – Или хочется верить. – В конце концов, мы согласны.

Только вот незадача.

Не можем пока взять в толк, какое же непосредственное участие в решении 4-й проблемы Гильберта приняли "функции Фибоначчи на металлических колесах", если ничего не меняется при их замене на гиперболический синус с любым другим основанием (вместо числа e).

Зачем известному математику и солидному человеку такие наслоения? – Наверно не дает покоя "золотая лихорадка" в надежде ухватить ЗС.

2) Можно посмотреть на задачу еще несколько иначе.

В предложенной модели выбор целых значений коэффициента $p \in R^{+}$, как было раньше в "шарикоподшипниковых пропорциях", теперь уже не является принципиальным.

То есть, с одной стороны, все точки числовой полуоси – "металлические пропорции". Но тогда в чем заключается смысл этих названий, претендующих на новизну? – Мало того, что они не несут новых знаний (кроме названия), так отныне не имеют и ни одного отличительного признака, плотно заполнив всю числовую полуось так, что и "к*а*нторова мышь не пробежит".

С другой стороны, никак не видны характерные особенности.

Тогда почему бы просто не вводить новые произвольные основания вместо натуральных логарифмов и достраивать, вернее, пристраивать геометрию?

Поскольку, спектр отношений увеличивается, предлагаем и свое участие в игре, расширив сферу названий на неалгебраические решения. Называть, например, корень из двух – равноногой пропорцией, корень из 3 – балалаечной, корень из 7 – семиструнной и т.д.

3) Ну, и спросим еще раз, в чем же состоят особые свойства ГФФЛ, которые позволяют им выделиться и войти новообразующей "градостроительной" основой новых геометрий для решения именно проблемы Гильберта? – Некоторыми свойствами они обладают, что непосредственно вытекает из теории огибающих линий. Это известно.

Но с таким же успехом можно взять любой мыслимый положительный корень любого мыслимого алгебраического уравнения и "нарядить его в костюмчик а-ля основание логарифма", и мы автоматически получаем модифицированную плоскость Лобачевского (2). – «Факир был трезв и фокус получился».

Здесь Вам не тут. Посмотрим на комментируемый объект как на предмет с заложенным в нем противоречием.

Ранее, так называемые металлические (металлургические) пропорции, определялись исключительно для целочисленных коэффициентов квадратного уравнения.

И в этой алгебре можно было узреть те или иные пропорциональности, за исключением надуманных названий. Теперь же гиперболический синус Фибоначчи определяется авторами на всей положительной вещественной (действительной) полуоси $p \in R^{+}$ [6].

А это значит, что и так называемая металлическая пропорция, специально обозначенная ими для похожести на золотую как Φ_p, тоже принадлежит всей области $\Phi_p \in R^{+}$. Таким образом, отныне любая точка вещественной оси – это металлическая пропорция. Да еще и с признаком "обобщенной золотой".

Довольно странный получается математический объект для науки о гармонии, когда гармоничным становится любое соотношение. В принципе в природе оно, видимо так и есть.

Только причем тогда шарикоподшипники? Да еще и с золотыми висюльками.

Эдакое гигантское золотое сечение, занявшее собой всю положительную числовую ось.

No comments! – Разве что аналогии с понятием "от противного".

Можно, конечно говорить о похожести архитектуры Москвы и Парижа, поскольку в обеих столицах дома, как правило, имеют окна. Но утверждать, что дома в Париже и Москве имеют окна, из них могут выглядывать люди, а значит, города одинаковы. – Ну, знаете ли...

Затеяли сыграть квартет... Возможно, кому-то уже покажется, что вопрос нами практически разжеван. Да, это действительно почти так.

Но, хорошо известно, что красить легче, чем потом сдирать старую краску и снова перекрашивать. Вот и приходится анализировать тему в различных масштабах и под разными углами зрения.

В самом деле, авторы предложили (2) бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского в зависимости от вещественного параметра $\lambda > 0$.

Но разве это обусловленное свойство "квадратичных" последовательностей Фибоначчи? – Нет.

Разве это как-то решает проблему Гильберта? – Тоже нет. Но тогда что же?

Математика – наука точная и требует строгости рассуждений.

Рис. 1. Формирование метрической плоскости Лобачевского: 4-я проблема Гильберта – на четверых

Должно быть четко и внятно показано, что же именно содержится примечательного в ГФФЛ, без чего невозможно построить новую плоскость Лобачевского или доказать проблему Гильберта. Как бы ни пытались, в цитируемых работах этого не найдете.

Поскольку с равным успехом всё одинаково и тривиально работает, даже если в качестве основания логарифма принять любое положительное число.

Посмотрим теперь на картину в целом, и как она выглядит со стороны в нашей, пусть субъективной интерпретации.

Видим, для нас нарисована прямо-таки радужная картина, которая в действительности сводится к диссонирующему звучанию расстроенного и принципиально не настраиваемого (независимо от рассаживания) квартета (рис. 1):

– В. Шпинадель с корнями обычного квадратного уравнения и с нулевым множеством дополнительных новых знаний,

– М. Газале с де-факто недоказанной формулой даже для такого простого случая как $x^2 = px + 1$, не говоря уже о более сложных прообразах аддитивных последовательностей Фибоначчи,

– А. Стахова с гиперболическими функциями Фибоначчи, которые уже при $q > 1$ в уравнении $x^2 = px + q$ просто исчезают и более не воспроизводятся, но зато им есть апробированная математическая альтернатива в виде огибающих линий,

– С. Арансона с очевидной интерпретацией гиперболического синуса с тривиальным жонглированием основаниями логарифма

и общим лозунгом: ВПЕРЕД К НОВЫМ ЗНАНИЯМ ... ОТ ФИНИША-2008 К СТАРТУ-1990.

Одна г-жа известные давным-давно решения квадратного уравнения просто взяла и назвала для юмора металлическими пропорциями, что одинаково звучит, если мы их назовем шарикоподшипниковыми.

Другой г-н неведомыми путями ловит в воздухе соотношение для простенького квадратного уравнения только с одним коэффициентом (!) – и это в 21 веке. Он даже не соизволил ради математической этики-приличия взять квадратное уравнение общего вида, которое изучают в школе.

Третий г-н возвеличивает первых двух, "выкручивает наизнанку" известные огибающие линии и называет их гиперболическими функциями Фибоначчи. Ну, да бог с ними, назвал, так назвал. Дело в другом. Уже при элементарном усложнении (последовательном обобщении) они превращаются в "пыль Кантора": вроде как должны быть, но их не видно и в бинокль. При этом огибающие линии дифференциальной геометрии, – пожалуйста, на виду, как на ладони.

Четвертый г-н, несмотря на абсолютное старшинство, оказался в душе самым молодым, довольно шустрым и смекалистым. То, что до него в математике считалось обычным явлением (формальная смена оснований логарифма), он заворачивает в "металлическую" фольгу, добавляет паранджу-Фибоначчи – для ослабления светоотражения, и как фокусник вбрасывает все это на элементарную ячейку метрической плоскости Лобачевского.

Далее следуют магические слова "Крекс–пекс–фекс".

Публика по сценарию должна дружно закричать "Вау!", но ... почему-то тишина.

Большая часть ничего не поняла. Другие молчат и не решаются высказаться, а вдруг попадут невпопад? И так уже мучительные полтора года. И дальше бы продолжалось, если бы в поисках славы-признания самый невыдержанный г-н не "вызвал огонь на себя".

Но безоружным (в смысле слабо подготовленным, – "мы ж мирные люди") как-то идти не солидно, да и не уважительно к визави.

Вот и пришлось посмотреть на изготовленный металлопрокат, что называется изнутри.

Любопытство познания было вознаграждено. А нашему неподдельному изумлению не было конца, когда мы увидели настоящих экстра-класса мастеров числовых манипуляций.

Эдак 300 лет назад им бы цены просто не было.

Раз, два, три, четыре, пять... Вышел ежик погулять.

Напомним вложение бесконечных множеств чисел:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}\,,$$

где N-натуральные, Z-целые, Q-рациональные, R-действительные.

Рациональные – множество чисел вида m/n, если m, n – целые.

Множество Q – счетно, множество R (всех точек на числовой прямой) – несчетно (доказал Кантор). То есть существуют иррациональные (не являющиеся рациональными) действительные числа. Причем их "намного больше", чем рациональных.

Выделим еще одно А-множество алгебраических чисел – корней многочлена с целыми коэффициентами. В частности, любое рациональное число m/n – алгебраическое, поскольку является корнем уравнения $n \cdot x = m$. Обратное – неверно: например, $\sqrt{2}$ как корень уравнения $x^2 = 2$ является алгебраическим, но иррациональным числом.

Еще раз запишем формулировку 4-й проблемы Гильберта: *перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими*.

Итак, путем элементарной замены основания логарифма на любое действительное число (множество которых несчетно) в работах [4, 5] фактически предъявляется несчетное множество изоморфных метрических форм плоскости Лобачевского.

Ну, и какое же это *решение* (по Стахову) упомянутой проблемы, если речь идет, по сути, об элементарном изменении масштаба?

Или, с другой стороны, в чем де-факто состоит *вклад в решение* (по Арансону) проблемы, если за словами "несчетное множество" воссоздается устойчивый логический образ, что нельзя перечислить метрики, о которых просил Гильберт. Ведь доказательство того, что нельзя перечислить метрики, – это тоже одно из приемлемых решений.

Так все же что? – *решение* или *вклад в решение*?

Когда между соавторами согласья нет,
Ответ приходится искать нам в Интернет.

Напомним, что термин "доказательство"[11] не имеет точного определения, и приблизительно означает его «убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других. Восприняв доказательство, мы делаемся в известной степени агрессивными, приобретая готовность убеждать других с помощью этого воспринятого нами рассуждения. Если же мы не приобретаем такой готовности, это значит, что мы еще не восприняли предъявленное нам рассуждение как доказательство и если даже признали его доказательством, то просто, чтобы отмахнуться» [11].

Точно так вполне убедительными являются рассуждения и в трехмерном евклидовом пространстве, когда, несмотря на пропорциональное сжимание-разжимание любой их координатных осей, любая прямая после соответствующего масштабирования остается быть геодезической.

Смешно даже подумать, что математики всего мира не могли на йоту приблизиться к этому "открытию" на протяжении более 100 лет, а вот Стахов–Арансон пришли и, устремив пальцем в небо, нарисовали нам совершенно новые "геометрические узоры и приволья Вселенной", о чем великий Гильберт даже и не мечтал.

Да что там нарисовать, он и представить такое не мог[12].

Тем более в Париже, – за тысячи километров от Урюпинска.

Гульчатай, открой личико[13]***...*** Итак, что же мы реально видим? – Систематика Фибоначчи в американской интерпретации выступает в роли троянского коня, под прикрытием которого в нетривиальную проблему Гильберта протаскивается тривиальная считалочка. – Воистину неуважение к памяти великого Мастера-математика.

И дело не в ошибках в доказательствах. – Это допустимо. Например, Кантор в свое время одну теорему доказывал трижды или четырежды, но потом сам находил в собственных рассуждениях ошибки, чему искренне радовался, и вновь ее доказывал.

Дело в том, что оппоненты в своих действиях допустили, возможно, и непреднамеренно фактическую неточность, которую потом аккуратно замаскировали в паранджу-Фибоначчи.

И не только. Рядят и в другие одежды: 4-я проблема Гильберта якобы «не была бы решена, если бы Вера Шпинадель не обобщила понятие "золотой пропорции" и не ввела понятие "металлических пропорций", которые задают бесконечное количество новых математических констант» [13].

И чем же эти постоянные новые? – если состоят исключительно из давно известных решений квадратного уравнения.

А как можно обобщать константы? – попробуйте обобщить, например, число π.

Все-таки лучше и проще назвать вещи своими именами, что речь идет об операции масштабирования или изоморфизма, без паранджи-Фибоначчи, металлических тележек, шарикоподшипниковых (металлургических) соотношений и прочей шелухи.

Нам несказанно далеко до гения Гильберта, но несколько легких вопросов в данном контексте можем предложить:

1. Возможно ли дальнейшее усложнение метрики, например, по принципу Трибоначчи, где имеется простое аналитическое решение?

2. Насколько остается принципиальным выбор натуральных чисел в качестве коэффициентов в "шарикоподшипниковой (горно-обогатительной) пропорции"?

3. Что привносят нового в метрику рациональные, иррациональные и трансцендентные значения p.

---

[11] С введения Фалесом Милетским в VI веке до н.э. традиции математического доказательства и следует, по всей видимости, говорить о зарождении науки // Клещев Д.С. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161588.htm.

[12] Поспрашивайте знакомых математиков, и они Вам с удовольствием расскажут байку-притчу о том, как всем известный Василий Иванович воспроизводил на экзамене с помощью циркуля и линейки геометрию квадратного трехчлена в евклидовом пространстве.

[13] Из кинофильма "Белое солнце пустыни". – Режиссер: Владимир Мотыль, 1969.

4. Насколько принципиальным является ограничение $q = 1$?

5. Насколько принципиальным является рациональность числа q?

6. Как при всем этом изменяются конечные формы геометрии?

7. Какова восприимчивость модели к начальным условиям?

На все просьбы у Вас минута ... не молчания. Поскольку с решением проблемы Гильберта они явно намудрили, к уважаемым господам из-за океана есть особая деликатная просьба, а именно: не подписываться (без особой на то надобности) подчеркнуто и исключительно от имени русской (славянской) школы.

Для собственной идентификации-персонификации вполне достаточно указать ФИО.

Ну, а если и выпирает неистребимое желание блеснуть знаниями географии, то лучше уж писать, например, г. Сан Диего – г. Горький или Канада – Винница.

Это для информативности людей даже лучше.

И для обретения ими душевного равновесия или спокойствия полезнее.

Если что, они всегда могут участливо подумать, – автор был в дороге.

Укачало... Да и мало ли что? – Просто подустал...

Всем (а особенно вытерпевшему нас до конца читателю) – успехов!
А на привольях Земли – ровных геодезических, на которых не укачивает!

Может, именно об этом и думал гений Гильберта,
когда водил его за руку в записи 4-й проблемы,
чтобы Вселенную не укачало!?

Ну-ка, бегать с такими скоростями по геодезическим и не очень ...

А самую главную метрику мы обязательно найдем.

И скорее все в России. Здесь параллели длиннее, воздух морознее и легче дышится...

Харьков–Москва–Урюпинск – 2009

Литература.

1. *Болибрух А.А.* Проблемы Гильберта (100 лет спустя). – М.: МЦ НМО, 1999. – 24 с.
2. *Арнольд В.И.* Публичная лекция 13 мая 2006 года. – http://elementy.ru/lib/430178/430281.
3. *Василенко С.Л.* О бедном квадрате замолвите слово... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.
4. *Стахов А.П., Арансон С.Х.* Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm.
5. *Стахов А.П., Арансон С.Х.* "Золотая" фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и "золотая" интерпретация специальной теории относительности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm.
6. *Арансон С.Х.* Еще раз о 4-й проблеме Гильберта // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15677, 01.12.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm.
7. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый Мир. – 2007. – № 11–12.
8. *Стахов А.П.* Теории чисел Фибоначчи: этапы большого пути (к завершению международной online конференции "Золотое Сечение в современной науке") // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15313, 30.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322077.htm.
9. *Стахов А.П.* "Металлические пропорции", формулы Газале, "золотая" фибоначчиева гониометрия и их роль в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и "современной теории чисел Фибоначчи" (к обоснованию "Математики Гармонии") // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15344, 15.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321119.htm.

10. Математическая энциклопедия / под ред. И.М. Виноградова. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – Том 1.

11. *Успенский В.А*. Семь размышлений на темы философии математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11127, 08.04.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/007a/02020021.htm.

12. *Матиясевич Ю.В*. Десятая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1993. – 224 с.

13. *Стахов А.П*. Некоторые рассуждения об обобщениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15643, 10.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321177.htm.