**С.Л. Василенко**

# Золотые трели

*Золотая клетка соловью не потеха.*
Английская пословица

Есть среди "золотосеченцев" один интересный человек – Григорий Мартыненко – профессор кафедры математической лингвистики Санкт-Петербургского университета, филолог и одновременно концертирующий певец.

Немногие могут похвастать таким удивительным сочетанием разносторонних и творческих человеческих качеств.

В частности, у нас весьма скромные знания о музыке. Впрочем (шутки ради), что такое септаккорд представляем. Да и гамму от гамака или гопака отличить тоже сумеем.

В математическом плане наибольшие успехи у него, похоже, имеются в основном области статистической обработки данных. Судя по публикациям о золотом сечении (ЗС), другие разделы даются с бо́льшим трудом.

Однако в них время от времени появляются свежие мысли, на которые мы неоднократно и с удовольствием ссылались в своих скромных статьях.

Обратно–перекрестных упоминаний о наших работах пока не было.

Видимо, еще не доросли до этого. Но это придает нам силы и стимулы стараться.

Хотя мы и так уже не раз «вытягивали его математико-диссонирующие ноты», которые при верной постановке начинают звучать действительно "золотым голосом России".

После чего и в нашем представлении мир начинает казаться более осмысленным.

***Наука приручать числа.*** Так, "коварная пятерка" или "магическая тройка", на которые сетовал автор [1] при подсчете кумулятивных сумм последовательностей Фибоначчи–Пойа [2, с. 35], оказались обычными заложниками выбора начальных условий, что показано нами в разделе «О полезности алхимии в теории пропорции» [3].

***Как куздра будланула бокра.*** Известен также случай, когда путем сравнения двух квадратов $a^2$ и $b^2$ им корректно выводилось [4] базовое уравнение "золотого" сечения.

Но затем происходила настоящая и так любимая многими золотильная метаморфоза с трудно выявляемыми признаками алхимии, инициированными нарушением простой математической логики.

Для полученных отрезков $a = 1$ и $b = \Phi \approx 1{,}618$, подчиняющихся "золотому" соотношению, проверяется "золотая" пропорция площадей квадратов, построенных на данных отрезках. Но как!? Буквенные обозначения остаются прежними, подразумевая сохранность и их численных значений, но строится уже иная пропорция с алогичной подменой смысла прежних букв. Другими словами на старых буквах-символах, характеризующих "золотое" соотношение, составляется новая пропорция, и естественно с уже новыми числами, но еще со старым смыслом позолоты.

В результате появляются лингвистические конструкции, похожие на классические выражения типа: «Глокая куздра штеко будланула бокра и курдячит бокренка» (языковед Лев Щерба), когда весь смысл и семантические признаки слов приходится на свой лад выуживать из их морфологии. А в целом неплохая идея пропорционального сравнения геометрических объектов под бременем ее непременного золочения приводит к неустранимым противоречиям и алогичным выводам. Хотя полезность подхода несомненна, и мы еще раз с удовольствием приведем основные результаты из работы [5] (приложение 1). В частности, он дает возможность осуществить выполненные нами геометрические интерпретации самых разных пропорциональных и соответствующих им алгебраических конструкций (прил. 1, № 5–11), вплоть до соотношений Трибоначчи и др.

Одновременно обратим внимание читателя на то, что подобные геометрические конструкции восходят еще к "Началам" Евклида и его построениям через взаимосвязь прямоугольников и квадратов. В частности, похожие интерпретации мы находим в его *предложении* 2.11 (прототипе золотого сечения): данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке [6, с. 75].

**< *Не* > *корнями едины.*** Нами давно замечено необычное увлечение Г. Мартыненко: представлять корни алгебраического уравнения в виде повторных радикалов.

Чего стоят только его устрашающего вида многоэтажные формулы [7] с гибридной структурой, которую он назвал непрерывной *корне-дробью*.

Правда, чуть позже (с помощью своего земляка И. Мысовских[1]) он записал [8], наконец, удобоваримый радикал для непростого уравнения $ax^z = bx^q + c$: $x = \sqrt[q]{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[q]{\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt[q]{\frac{c}{a} + \ldots}^{z}}^{z}}$ .

Казалось бы, уже исписаны горы бумаг на эту тему, но он все равно с завидным упрямством снова и снова возвращается к этой теме [9]. Понятно, что вышеприведенная формула эстетически не красивая, да и неудобная в расчетах: какой-то корень с туманной степенью $z/q$. Ясно также, что на ЭВМ все это считается за доли секунды.

В чем же смысл таких "подвигов"? Возможно, весь резон в названии «гармоническая тетрада повторных радикалов»? – Внести, так сказать, свой скромный вклад в пока еще худенькую и бестелесную «математику гармонии». Если это так, то выбрана не самая лучшая сфера приложений усилий, – в смысле радикала.

Но не будем "городить огород" на ровном месте, тем более там, где еще ничего не растет, а посмотрим на это глазами заинтересованного и любознательного читателя.

Что можно здесь увидеть для себя и предложить другим?

Прежде всего, и самое главное, это известная замена переменной на свое обратное значение, как действительно эффективный механизм в математике. – Он позволяет довольно легко выполнять различные формульные манипуляции в самых разных приложениях.

Заметим, что золотое сечение (ЗС) своим происхождением во многом обязано именно этой операции, а потому она сто́ит того, чтобы к ней относились с должным уважением, хотя бы в среде ортодоксальных и не очень поклонников ЗС. Возьмем, например, уравнение $x^n = x^{n-1} + 1$. Записать красивый радикал "в лоб" по вышеприведенной форме (Мысовских) не удается, поскольку приходим к корню степени $n/(n-1)$.

Разделим уравнение на старшую степень $x^n$ и сделаем замену переменной $y = 1/x$, получим $1 = y + y^n$. Откуда легко получается базовая формула $y = \sqrt[n]{1-y}$ для формирования многократно повторяющегося радикала, который после обратного перехода к первой переменной приобретает эстетически приглядный вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\sqrt[n]{1-\sqrt[n]{1-\ldots}}}} .$$

Сказать, для чего подобные радикалы нужны, особо и нечего.

Вероятнее всего, для удовлетворения субъективных пожеланий, а также некоторой математической завершенности чисто узкоспециальной задачи.

Относительно того, что «аналогичные манипуляции могут быть осуществлены и

---

[1] *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений: Учебное пособие. – СПб: СПУ, 1998. – 472 с.

применительно к непрерывным дробям» [9], не все так очевидно и требует определенных пояснений. Действительно, всякое иррациональное число выражается цепной дробью.

Но периодические бесконечные дроби соответствуют только квадратичным иррациональностям типа $r + s\sqrt{N}$, где $r,\ s$ – рациональные числа, $N$ – натуральное число, но не полный квадрат [10]. Поэтому представить цепной (непрерывной) периодической дробью можно только квадратичную иррациональность. Уже кубическое алгебраическое уравнение такого решения не дает, не говоря о более высоких степенях.

***От перемены мест ... все меняется.*** Можно упомянуть еще одно направление мышления Г. Мартыненко, на котором остановимся чуть подробнее. В работах [11, 12] даны наброски по модификации известной тождественной взаимосвязи между числами Фибоначчи и числом Ф, преследуя две взаимосвязанные но, в общем-то, неодинаковые цели.

В первом случае, на двух частных примерах предпринята попытка "внедрения" чисел Фибоначчи в квадратное уравнение золотого сечения таким образом, чтобы оно с повышением порядка уравнения по-прежнему давало решение Ф.

Во втором случае, эта процедура записана уже в формульном виде с точки зрения получения единичных тождеств и сохранения комплиментарных (соотносящихся по значению) свойств для двух взаимосвязанных типов алгебраических уравнений.

Изложение материала в упомянутых статьях представлено несколько небрежно и больше на интуитивном уровне, поэтому попытаемся их увязать в одну обоснованную математическую модель, которая будет нам полезной в дальнейших исследованиях.

С учетом известной формулы Бине для чисел Фибоначчи $F_n$ и свойств числа $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ выполним несложные тождественные преобразования

$$F_{n-1}\Phi^n - F_n\Phi^{n-1} = \frac{\Phi^{n-1} - (-1)^{n-1}\Phi^{-n+1}}{\sqrt{5}}\Phi^n - \frac{\Phi^n - (-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}\Phi^{n-1} =$$

$$= \frac{\Phi^{2n-1} - (-1)^{n-1}\Phi - \Phi^{2n-1} + (-1)^n\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{(-1)^n\Phi + (-1)^n\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = (-1)^n\,\frac{\Phi+\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = (-1)^n,$$

откуда окончательно запишем

$$F_{n-1}\Phi^n - F_n\Phi^{n-1} = (-1)^n, \tag{1}$$

где $n \in \mathrm{N}$ – числа натурального ряда, $(F_0,\, F_1) = (0, 1)$.

Уравнение (1) можно рассматривать знакопеременным единичным тождеством, которое – есть не что иное, как запись уравнения через уже известное частное решение $x = \Phi$.

Исходное алгебраическое уравнение (от переменной $x$) приобретает вид

$$x^n - \frac{F_n}{F_{n-1}}x^{n-1} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}}. \tag{2}$$

Соответствующее ему однородное линейное разностное (возвратное) уравнение $n$-го порядка запишется как

$$x_{n+t} = \frac{F_n}{F_{n-1}}x_{n-1+t} + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}}x_t, \tag{3}$$

где параметр $t = 0, 1, 2, \ldots$ в виде нижнего индекса – дискретное время для формирования рекуррентной последовательности при заданных начальных условиях $X_{\text{o}} = (x_0,\, x_1, \ldots x_{n-1})$.

Например, для $n = 11$ алгебраическое и разностное уравнения имеют вид:

$$55x^{11} - 89x^{10} + 1 = 0\,, \qquad x_{11+t} = \frac{89}{55}x_{10+t} - \frac{1}{55}x_t\,.$$

Выполнив деление полинома, входящего в уравнение (1), на квадратный трехчлен золотого сечения $x^2 - x - 1$ (без остатка, – по теореме Безу), можно записать адекватное представление (1) в виде произведения двух полиномов, причем коэффициенты второго $P(x)$ равны $n-1$ начальным знакопеременным ненулевым числам Фибоначчи

$$\left(x^2 - x - 1\right)\cdot P(x) = 0, \qquad P(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+p} F_{j+1} x^j\,. \tag{4}$$

В частности, расписав в уравнении (4) полином $P(x)$ для степени $n = 11$, получаем

$$\left(x^2 - x - 1\right)\cdot\left(55x^9 - 34x^8 + 21x^7 - 13x^6 + 8x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1\right) = 0\,.$$

Можно показать, что все корни полинома $P(x)$ в (4) по модулю не превосходят 1, поэтому согласно центральной теореме золотого сечения [13] линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (3), порождаемая алгебраическим уравнением $P(x)\cdot\left(x^2 - x - 1\right) = 0$, практически для любого набора начальных данных $X_o = (x_0, x_1, \ldots x_{n+1})$ и целочисленных значений $k$ имеет асимптотическое свойство $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+k}/x_t = \Phi^k$.

Проанализируем полученные результаты.

1. Алгебраическое уравнение (2) можно считать обобщением уравнения золотого сечения, поскольку для произвольной степени $n \geq 2$, оно обеспечивает быструю сходимость адекватной рекуррентной последовательности (3) к своему аттрактору – гармонической пропорции (рис. 1). Чего, например, не скажешь об уравнении $x_{n+t} = F_n x + F_{n-1}$ [14], которое по этим параметрам "не тянет" на обобщение (уже при $n \geq 16$ оно практически не сходится) равно как и на эффективное обустройство «математики гармонии».

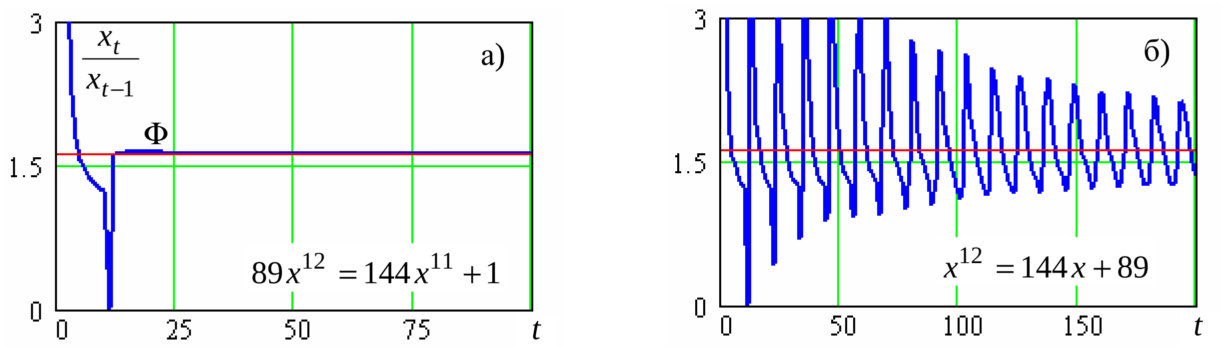



Рис. 1. Сходимость возвратных последовательностей к золотому сечению при начальных условиях $x_s = s^2$, $s = \overline{0, n-2}$, $x_{n-1} = 1$, $n = 12$: а) идея Мартыненко–Алферова; б) модель Стахова $x_{n+t} = F_n x + F_{n-1}$

Описанные признаки являются прямым следствием величины разрыва между старшими степенями членов уравнения.

2. К недостаткам можно отнести отсутствие аналитического решения алгебраического уравнения (2) в общем виде, нецелочисленные значения генерируемых рядов по формуле (3) и перемену знака у единицы в (1)–(3).

3. В этом контексте по всем параметрам значительные преимущества имеет обобщенное уравнение гармонической пропорции [15]: равенство единице всех

коэффициентов характеристического многочлена; простое аналитическое решение в общем виде; быстрая сходимость суммирующей целочисленной *V-рекурсии* к числу Ф при любом сколь угодно большом количестве произвольных начальных условий, не равных одновременно нулю и др.

***От великого до смешного один шаг*** (Наполеон Бонапарт, 1812)**.** В творчестве Г. Мартыненко есть еще один момент, который в принципе можно оставить и без внимания, но уж больно явно он на виду. Мы уже отмечали [16] как в своих работах автор сначала назвал, а теперь славословит "уравнение Газале", равно как и "уравнение Стахова" (?).

Говорим мы это исключительно потому, что в математике доподлинно известно: алгебраическое уравнение $n$-й степени не расчленяется по авторам, однако, в их честь могут называться конкретные методы решения и теоремы по этому уравнению: Кордано, Декарта–Эйлера, Феррари, Рауса–Гурвица, Льенара–Шипара, Штурма и др. [17, с. 37–45].

То есть *авторизуется решение* (!), *а не само алгебраическое уравнение*.

Ученым в области математической лингвистики это хорошо известно.

Ни М. Газале в своем "Гномоне" [18], ни А. Стахов в своих работах подобных решений в общем виде никогда не предлагали.

Надо полагать, что египетский исследователь М. Газале и сам бы весьма удивился, узнав, что у него появилось собственное алгебраическое уравнение, а количество "русскоязычных ссылок", возможно, стало больше чем во всей Африке.

В принципе законом не запрещено, а потому алгебраические уравнение можно называть хоть именем Шекспира, Пушкина или Папы Римского, ибо неисповедимы пути господни. Только вот незадача. Подобные "золотые трели" создают устойчивую платформу неприятия материала и в целом исследований в области ЗС со стороны специалистов, имеющих маломальские представления об алгебраической теории.

Поэтому в описанной схеме-интерпретации добрые и искренние намерения как-то и кого-то увековечить фактически оказывают медвежью услугу, что в народе потом часто и справедливо ассоциируют русской поговоркой «Ворона в павлиньих перьях».

Подобные фальшивые ноты в определенной мере также наносят развитию основ математической гармонии осязаемый вред, "отпугивая" своим диссонансом молодые пытливые умы и переводя глазами многих наработки ЗС в сферу несерьезных исследований.

***Тренога триномов или трио мономов.*** В математике давно известно такое понятие как ТРИНОМ (греч. *treis* три и *nomos* член) – трехчленное математическое выражение, которое в алгебре обычно означает то же, что трехчлен: три величины, соединенные знаками плюс или минус. Поэтому многочлен по-другому можно назвать полиномом. Тогда одночлен – *моном*; двучлен – *бином*; трехчлен – *трином*.

Существуют отдельные семейства полиномов с особыми свойствами: многочлены Чебышева и Бернулли, интерполяционные полиномы Лагранжа, Эрмита. Они отличаются внутренней структурированностью и выходят далеко за рамки обычных триномов.

Так, многочлены Чебышева[2] являются одним из наиболее замечательных семейств многочленов. Они часто встречаются во многих областях математики (теория аппроксимация, теория чисел, топология трехмерных многообразий и др.) и определяются рекуррентно $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ с начальными условиями: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ [19, с. 116].

Примечательно, что аналогичная числовая последовательность генерирует натуральный ряд: $N_{n+1} = 2N_n - N_{n-1} \to 1, 2, 3, 4, ...$ при $(N_0, N_1) = (0, 1)$.

---

[2] Определение многочленов Чебышева основано на том, что $\cos n\varphi$ полиномиальным образом выражается через $\cos\varphi$, то есть существует такой многочлен $T_n(x)$, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$, исходя из формулы $\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi \cdot \cos n\varphi$.

Свойства триномов давно и достаточно хорошо изучены.

Например, в [19, с. 78] находим: «Согласно признаку Перрона трином $x^n \pm ax^{n-1} \pm 1$, где $a \geq 3$ – целое число, неприводим[3]. При $a = 2$ трином не приводим, если у него нет корней, равных $\pm 1$. Все эти утверждения верны и для тринома $x^n \pm ax \pm 1$».

В частности, представляют интерес две теоремы [20]:

– трином $x^5 + x + q$ раскладывается в произведение неприводимых квадратного и кубического многочленов тогда и только тогда, когда $q = \pm 1$ или $q = \pm 6$.

– трином $x^5 - x + q$ раскладывается в произведение неприводимых квадратного и кубического многочленов тогда и только тогда, когда $q = \pm 15$, $q = \pm 22\,440$ или $q = \pm 2\,759\,640$.

Соответствующие уравнения 5-й степени имеют аналитические решения, что довольно редкое явление и позволяют проводить синтез и анализ различных формул.

***Вместо заключения.*** Так что для поднятия уровня признания и фиксации личного вклада отдельных ученых в теорию ЗС и науку о гармонии одного желания мало.

Нужна и минимально-необходимая формальная подоснова с учетом сложившейся многолетней практики в той же математике так, чтобы нововведения в терминологии воспринимались и профи-математиками исключительно положительно. В противном случае существует высокий риск превратиться в "солистов–подпевал", когда вместо ожидаемого позитива, наоборот будут тиражироваться негативные смыслы-восприятия.

А славянская поддержка может найти и более достойное применение. – Например, на восстановление и поддержание того же имиджа российский ученых (С. Ясинского, А. Татаренко и др.), которые обозначили новый вектор и дали альтернативу в исследовании гармонии, по сути, выведя ее из гипнотического состояния за пределы узких рамок золотого сечения и поставив на новые рельсы квадратичных решений.

Остается всем пожелать актуальных и полезных начинаний в этом направлении.

А лично Григорию Мартыненко – новых научных работ, а также ненаучных и необязательно новых (в смысле иногда хорошо забытых) песен.

**Литература.**

1. *Мартыненко Г.Я.* Кумулятивные суммы последовательностей Мидхата Газале и Алексея Стахова // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15167, 16.03.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322017.htm.

2. *Ясинский С.А.* "Золотое" сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.

3. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции. Часть вторая // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15349, 17.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321120.htm.

4. *Мартыненко Г.Я.* Дополнение к интерпретации Золотого Сечения Эвклидом, навеянное статьей А.П. Стахова и обменом мнениями по электронной почте // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15529, 12.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321159.htm.

5. *Василенко С.Л.* Через "тернии" к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15541, 18.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161543.htm.

6. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.:

[3] Многочлен $f$ с коэффициентами из кольца $k$ называют приводимым над $k$, если $f = g\,h$, где $g$ и $h$ – многочлены положительной степени с коэффициентами из кольца $k$. В противном случае многочлен называют неприводимым над $k$ [19, с. 58].

ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

7. *Мартыненко Г.Я.* Числа Стахова-Газале как предельные значения непрерывных мульти-дробей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15040, 13.01.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321091.htm.

8. *Мартыненко Г.Я.* Решение нелинейных уравнений методом повторных радикалов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15335, 11.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321114.htm.

9. *Мартыненко Г.Я.* Гармоническая тетрада повторных радикалов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15634, 06.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321175.htm.

10. *Бескин Н.М.* Бесконечные цепные дроби // Квант.– 1970. – № 8. – С. 10–20.

11. *Мартыненко Г.Я.* Юбилейные сюжеты для А. Стахова // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15267, 07.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322051.htm.в

12. *Алферов С.А.* Комплементарность и великая сила аналогии в пространстве ЗП // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15337, 12.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321115.htm.в

13. *Василенко С.Л.* Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.

14. *Стахов А.П.* Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm#090.

15. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

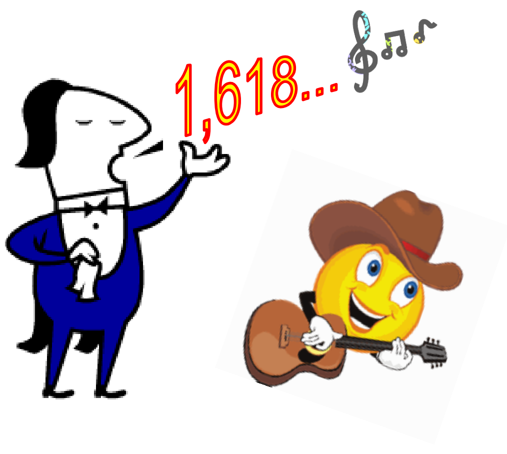
16. *Василенко С.Л.* Квадратичные цепные дроби (квадрацепи) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15595, 10.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161557.htm.

17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

18. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

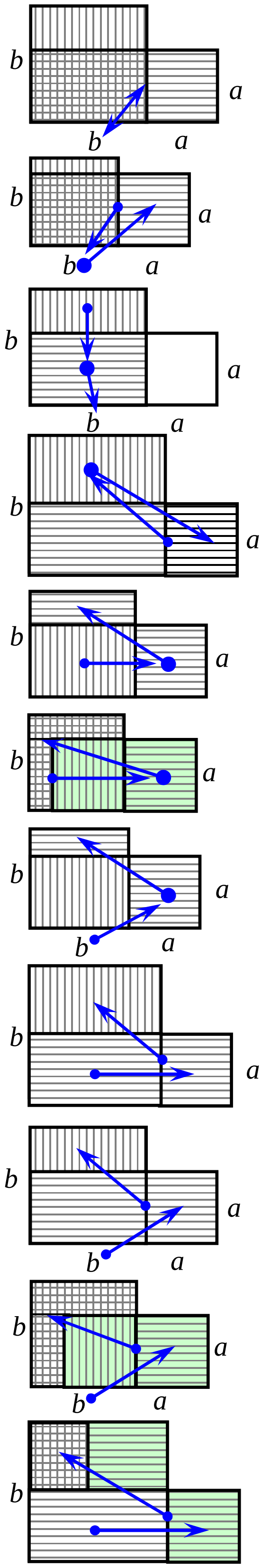
19. *Прасолов В.В.* Многочлены: 2-е изд., стереотип. – М.: МЦМНО, 2001. – с. 336.

20. *Rabinowitz S.* The factorization of $x^5 \pm x \pm n$ // Math. Mag. – 1988. – Vol. 61 – P. 191–193.



*Приложение* 1

**Алгебраически-геометрическая интерпретация некоторых пропорций**



| № | Исходное выражение | Базовое уравнение, $a=1$ | Корень | Примечание |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $b^2=(b+a)\cdot a$ | $b^2=b+1$ | 1,6180 | ЗС |
| 2 | $\frac{(b+a)a}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}$ | $b^4=b+1$ | 1,2207 | РС |
| 3 | $\frac{(b-a)b}{ab}=\frac{ab}{b^2}$ | $b^2=b+1$ | 1,6180 | ЗС = РС |
| 4 | $\frac{(b+a)a}{(b-a)b}=\frac{(b-a)b}{a^2}$ | $b^4=2b^3-b^2+b+1$ | 1,8972 | РС |
| 5 | $\frac{ab}{a^2}=\frac{a^2}{(b-a)b}$ | $b^3=b^2+1$ | 1,4656 | РС |
| 6 | $\frac{ab}{a^2}=\frac{a^2}{b^2-a^2}$ | $b^3=b+1$ | 1,3247 | РС |
| 7 | $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{(b-a)b}$ | $b^4=b^3+1$ | 1,3803 | РС |
| 8 | $\frac{ab}{a^2}=\frac{(b+a)a}{(b-a)b}$ | $b^3=b^2+b+1$ | 1,8393 | Трибоначчи |
| 9 | $\frac{b^2}{a^2}=\frac{(b+a)a}{(b-a)b}$ | $b^4=b^3+b+1$ | 1,6180 | ЗС $\neq$ РС |
| 10 | $\frac{b^2}{a^2}=\frac{(b+a)a}{b^2-a^2}$ | $b^4=b^2+b+1$ | 1,4656 | См. № 5 |
| 11 | $\frac{b^2}{a^2}=\frac{(b+a)a}{b^2-ab-a^2}$ | $b^4=b^3+b^2+b+1$ | 1,9276 | 4-боначчи |

ЗС – Золотое Сечение; РС – пропорция с Равными Средними членами