С.Л. Василенко

Квадратичные закономерности

"*О радиксе квадрата или о корне четверояком* "
Из русских рукописей конца XVII в. [1, с. 305]

Квадратно-гнездовой посев. Даже если Природа – колоссальная лаборатория, а Вселенная – гигантская ЭВМ, то все равно в их основе лежит весьма ограниченное количество алгоритмов-закономерностей, один из которых зиждется на "квадратичной концепции". Достаточно упомянуть теорему Пифагора или квадратичные формы в математике, закон всемирного тяготения Ньютона или закон Кулона в физике (с их знаменателем в формулах) и др.

На языке алгебры или алгебраической геометрии таковым абстрактно-узловым начальным объектом является структура обычного квадратного уравнения, знакомого еще со школьной скамьи.

А уникальное золотое сечение (ЗС) является всего лишь частным, хотя важным исключительным случаем такого уравнения. Но не более того.

Поэтому большинство числовых свойств ЗС проистекают именно отсюда.

Или выражаются этими "словами-знаками математики", что в принципе одно и то же.

Геометрические образы или известные в настоящее время построения ЗС, так или иначе, тоже сводятся к его воспроизведению на основе квадратного уравнения, все коэффициенты которого равны 1.

Это во многом объясняет повышенный интерес к квадратным уравнениям, являющимся аккумулятором (хранителем) и генератором многих процессов и явлений, что не всегда видно невооруженным глазом.

История длиной в одну страницу. Квадратные уравнения умели решать еще древние вавилоняне [2, с. 42–46]. Они тогда еще не знали отрицательных и тем более комплексных чисел, поэтому рассматривали только уравнения с положительными корнями, которые записывали обычно числами в 60-ричной системе счисления.

Как ни удивительно, но их алгоритмы уже тогда были основаны на подходе, известном сегодня как теорема Виета, а именно: для исходного уравнения $x^2 - px + q = 0$, по сути, воссоздавался ход решения канонической системы двух уравнений $\lambda_1\lambda_2 = q$, $\lambda_1 + \lambda_2 = p$ [2, с. 43], из которой и определялся положительный корень, например λ_1.

Евклид «нигде не пользуется общей формулой решения квадратного уравнения даже в геометрической форме» [3, с. 438], включая задачи, потенциально сводимые к таким уравнениям. Но в его "Началах" есть предложение 6.28 [3, с. 209], достаточно длинное в изложении, но из которого может быть выведена основная формула вычисления корня в ее современном представлении.

В начале тринадцатого века появилось принципиально новое понимание ЗС. Оно было связано с открытием итальянца по прозвищу Фибоначчи (1170–1240) аддитивной числовой последовательности, отношение соседних членов которой стремится к ЗС.

Легко показать, что аналитическое разрешение числовой последовательности, или как сегодня говорят, разностного (возвратного) уравнения, и в этом случае очень легко сводится к алгебраическим построениям.

Действительно, разделим аддитивную рекурсию $x_{t+1} = x_t + x_{t-1}$ чисел Фибоначчи (будущее = настоящее + прошлое) на "настоящее" x_t: $x_{t+1}/x_t = 1 + x_{t-1}/x_t$ и устремим условное время (номера чисел в последовательности) к бесконечности $t \to \infty$.

Обозначив предельное отношение соседних членов как $x_{t+1}/x_t = x_t/x_{t-1} = \lambda$, получаем равенство $\lambda = 1 + \lambda^{-1}$ или в более привычном виде, – квадратное уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$.

Полпорции о пропорции или математическая кулинария. Существует мнение [1, 4], что слово "пропорция" (*proportio*) ввел в употребление римский оратор-мыслитель Цицерон в I в. до н. э., переводя на латынь греческий термин Платона "аналогия" (в эстетической науке). Он буквально означал "соотношение" как паритетность двух соотношений.

Цамберти в XV в. впервые дает определение: «Пропорция есть равенство двух отношений» [1, с. 310]. В те времена пропорции придавали исключительное значение, считая её «основанием, на котором строится вся математика» (Г. Витали).

Пропорция является компонентом категории меры и обычно выражает основные закономерности структуры изучаемых объектов, например, в виде количественного соотношения частей чего-либо.

В современных словарях пропорция (соразмерность, выровненность частей) в математике – равенство между двумя отношениями четырех числовых величин, т. е. равенство вида $a:b=c:d$. Читается так: «a относится к b так же, как c относится к d», причем a и d называют *крайними*, а b и c – *средними* членами пропорции.

Пифагорейская школа использовала три пропорции (аналогии) и их средние [1, с. 307]:

	пропорция	среднее
арифметическая (АП):	$a-b=c-d$,	$b=(a+c)/2$,
геометрическая (ГП):	$a:b=c:d$,	$b=\sqrt{ac}$,
гармоническая:	$a:c=(a-b):(b-c)$,	$b=2ac/(a+c)$.

Согласно Аристотелю термины АП и ГП своим происхождением обязаны условному разделению: 1) прибавление чисел давало их прогрессию с так называемой арифметической пропорцией, что было уделом арифметики; 2) сравнение величин в виде отрезков ставило вопрос, какую часть одна величина составляет от другой, что было делом геометрии.

Со времен Лагранжа (1795) употребление АП стало считаться неинформативным и неудобным, однако арифметическое среднее остается.

«Евклид не упоминает других пифагорейских пропорций, кроме геометрической, называя ее просто пропорцией» [1, с. 308], хотя и употребляет термины:

"предыдущий" и "последующий", "средние" и "крайние" члены.

Под понятием числа греки понимали только целое число.

Поэтому теория пропорций, излагаемая при помощи прямолинейных отрезков, позволяла в высоком совершенстве обойтись без понятия дробного числа.

В предложении 17 (книга 6) Евклид геометрически доказывает равенство квадрата среднего пропорционального двух чисел произведению их [1, с. 309]: «если три прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключенный между крайними, равен квадрату на средней» [3, с. 193]. По сути, речь идет о гармонической пропорции $a:b=b:c$.

Но подобной арифметической редакции Евклид не видит или не придает значения, то есть она в таком виде для него не представляет интереса.

Но уже в предложении 6.30 он рассекает «данную ограниченную прямую ... в крайнем и среднем отношении» [3, с. 213], когда одинаково относятся «целая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему» [3, с. 173].

Хотя он «знает, что из пропорции $a:b=b:c$ вытекает соотношение $a:c=a^2:b^2$, а из пропорций $a:b=b:c=c:d$ – соотношение $a:d=a^3:b^3$» (Лагранж, 1880).

По нашему убеждению, современные понятия гармонической пропорции и золотого сечения для Евклида были совершенно разными задачами, которые не представляли единое целое и не объединялись под крышей (эгидой) одного и того же числа или понятия.

"Металлический" ваучер. Кто бы мог подумать, что квадратное уравнение когда-нибудь станет объектом полновесной "купли-распродажи"? – Понятно, что не в прямом, а переносном смысле. Но все-таки. Когда почти как на аукционе раздаются его решения, что называется налево и направо в частные руки.

А кто бы мог представить, что достаточно заявить пусть даже заведомую глупость, как при должной режиссуре она превращается ... в своеобразный чек-ваучер, дающий право на приватизацию пусть не всего уравнения, то хотя бы его отдельных решений, перекрашенных под медь, никель и еще бог его знает что.

Думаете это выдумки? Отнюдь. Достаточно зайти на сайт АТ http://www.trinitas.ru/ и включить поисковик со словом "металл". И он Вам буквально вывалит целую подборку о том, как «взрослые ученые мужи» пытаются де-факто приватизировать квадратное уравнение – достояние классической математики и всего человечества не в одно поколении.

Так называемые "металлические пропорции" в действительности являются традиционным решением обычного квадратного уравнения, и кроме названия (с претензией внедриться в синонимический ряд золотого сечения) у них нет ни одного отличительного математического свойства, которое не было бы известно до появления этого названия.

То есть формула новизны данного *паралогизма*[1] – есть множество пустое.

В равной степени это можно отнести и к отдельным работам Н. Косинова [5], где он увлекся в этой части разными теоремами, которые в своем большинстве фактически являются повторением (пересказом) давно и хорошо известной адекватной связи между алгебраическими и разностными (возвратными) уравнениями [6].

Нам с самого начала было понятно, что все эти "металлические" капризы-вычуры так и останутся фантазиями. – Хотя бы потому, что они соразмерно тянут за собой похожее терминологическое клонирование-произвол в виде таких аналогов-близнецов, как "воздушно-капельные" или "газовые" соотношения. – Прямо как в детсаду, для объяснения пандемии гриппа. С таким же успехом здесь подойдут "газировано-сиропные", "овощные" или "фруктовые" эрзацы-пропорции и т.п.

В целом это тема еще не одного отдельного анализа.

Поэтому пока ограничимся коротким замечанием и пожеланием о недопустимости даже самой возможности подменять квадратичные решения псевдосимволикой подобного толка, откуда бы и в каком бы закамуфлированном виде она не исходила.

Явь–рекурсия. Помимо последовательно-рекуррентного определения числовых рядов Фибоначчи существует их представление в явном (аналитическом) виде. В простейшем случае для чисел Фибоначчи давно определена соответствующая формула Бине.

Её сравнительно несложный вывод можно найти в монографиях [6, с. 340; 7, с. 25].

Об этом же свидетельствует и научно-популярная книга [8, с. 62], где приведено развитие этой формулы на частный случай ($q = 1$) квадратного уравнения $x^2 = px + 1$ в виде

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{p'}, \text{ где } \lambda_{1,2} = \frac{p \pm p'}{2} \text{ – корни уравнения; } p' = \sqrt{p^2 + 4}.$$

Интересен нюанс: эта формула представлена чисто формально, без обстоятельного вывода, а основная часть проведения выкладок адресована читателю в качестве упражнения.

То есть она достоверна, но не исключено, что получена автором эмпирически, а самого основательного вывода (доказательства) он просто не знает, и предлагает это вместо него проделать читателям.

---

[1] ПАРАЛОГИЗМ – ложно построенное суждение в результате непреднамеренной логической ошибки [Словарь Ефремовой. – http://www.edudic.ru/efr/72430].

Не исключено в этой связи, что она вообще заимствована из других источников.

Обобщение данной формулы уже для квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$ с двумя коэффициентами осуществлено нами в статье [9].

Все выполнено тоже вроде правильно.

Но нас все время не покидала мысль о некоей незавершенности этого подхода, невнятности в использовании метода математической индукции и заметном отличии от уже наработанных и проверенных практикой доказательных схем [6, 7].

Поэтому попробуем еще раз вернуться к этому вопросу, но только на несколько иной качественной подоснове.

Почем фунт лиха? – По цене за "квадратный метр воздуха".

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 = px + 1$ и запишем [8]:

$$F_n = pF_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\lambda^n - (-\lambda)^{-n}}{\lambda + \lambda^{-1}} = \frac{\lambda^n - (-\lambda)^{-n}}{\sqrt{p^2 + 4}}. \qquad (1)$$

Согласно логике и знаменитым теоремам К. Гёделя система не может до конца понять свое собственное устройство, если не поднимется на следующий уровень сложности (обобщения, развития).

Самым простым повышением уровня сложности в нашем случае является снятие ограничения $q = 1$ и изучение рекуррентной последовательности $F_n = pF_{n-1} + qF_{n-2}$ с ее алгебраическим аналогом – квадратным уравнением общего вида $x^2 = px + q$.

«Как говорит Лаплас, аналитик целиком отдается вычислению и упускает из виду задачу, то есть общий обзор и зависимость отдельных моментов расчета от целого» [10].

Поэтому попытаемся рассмотреть это уравнение на физическом уровне.

Предположим отвлеченно, что неизвестное x является прямолинейным метрическим отрезком.

Тогда из условий физической реализуемости системы параметр p отвечает за *линейный размер* на вещественной оси. Аналогично параметр q характеризует уже *площадь*.

То есть на физическом уровне смысловые нагрузки и соответствующие размерности у этих параметров совершенно разные, например, м и м^2.

Отсюда, не производя никаких вычислений, достаточно легко проследить (догадаться), в каких местах соотношения (1) возможно появление параметра $q \neq 1$.

Прежде всего, как подсказывает логика, – в знаменателе рядом с четверкой, чтобы обеспечить суммирование однородных величин размерностью площади, то есть $p^2 + 4q$.

Ну, и конечно, в числителе – рядом с величиной λ^{-n} в виде, который также позволял бы выполнять сложение однородных слагаемых. Так мы приходим к коэффициенту q^n .

Действительно, при умножении на это число, в числителе появляются одинаковые размерности двух суммируемых величин.

В общем-то, это и есть основной интуитивный вывод, который продемонстрирован исключительно для того, чтобы показать, насколько важно держать все время в голове физическую интерпретацию модели, что является полезным на всех этапах работы с ней.

Конечно, это ни в коем случае не заменяет формализованного решения. Более того, теоретически могут появиться дополнительные слагаемые, которые сейчас просто не видны.

Так, не исключается в знаменателе под корнем выражение типа q^2 / p^2 , имеющее тоже размерность м^2.

Но для этого уже требуются определенные аналитические выкладки

Аля–Бине-решение разностного уравнения 2-го порядка.

Русские математики уже давно разработали инструментарий (надо полагать, что есть и зарубежные аналоги), который превращает подобные задачки в несложные упражнения, хотя в результате и приводят к довольно общим решениям.

Итак, проанализируем ход подобного решения в максимально приближенном виде, изложенном в монографии [6, с. 340–341].

Вместо нижнего индекса *n* будем использовать обозначение *t*, которое легко ассоциируется с привычным переходом от дискретного к непрерывному времени: то есть t в виде нижнего индекса – это дискретность, t в скобках – непрерывность.

Рассмотрим последовательность чисел, начинающихся с нуля и единицы, в которой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему предыдущих с весовыми коэффициентами: $F_{t+2} = pF_{t+1} + qF_t$.

Согласно условию задача сводится к решению конечно-разностного линейного уравнения $F(t+2) = pF(t+1) + qF(t)$ с постоянными коэффициентами p, q при начальных условиях $F(0) = 0$ и $F(1) = 1$, где $F(t)$ обозначает число обобщенной последовательности Фибоначчи номера t.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda - p\lambda - q = 0$.

Находим его корни $\lambda_{1,2} = (p \pm p')/2$, где $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$, так что $F(t) = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t$.

Постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий, то есть из уравнений:

$$t = 0: \; C_1 + C_2 = 0, \qquad t = 1: \; (C_1 + C_2) + p'(C_1 - C_2) = 2,$$

следовательно, $F(t) = (\lambda_1^t - \lambda_2^t)/p'$.

Согласно теореме Виета: для приведенного квадратного уравнения (в котором коэффициент при x^2 равен единице) сумма корней равна коэффициенту при *x*, взятому с противоположным знаком, а произведение – свободному члену, то есть $\lambda_1\lambda_2 = -q$.

Опустив индекс у положительного корня $\lambda = \lambda_1$, и определив $\lambda_2 = -q/\lambda$, получаем:

$$F(t) = \frac{\lambda^t - (-q)^t \lambda^{-t}}{\sqrt{p^2 + 4q}}. \qquad (2)$$

Таким образом, окончательная форма находится обычным (традиционным) способом решения возвратного уравнения без привлечения метода математической индукции, использование которого в данном аспекте изложения не является тривиальным.

В то же время представленный ход решения является достаточно простым, и полностью отвечает поставленной задаче.

Как мы и предполагали выше, параметр q появился у нас в формуле (2) сразу в двух местах (в числителе и знаменателе), не считая его естественного присутствия в формульной записи самого положительного корня $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)/2$.

Таким образом, явная (аналитическая) форма (2) выражения чисел аддитивной последовательности, соответствующей квадратному уравнению общего вида, сравнительно легко выводится из широко известной теории исчисление конечных разностей [6].

Ставки повышаются... или новые начальные условия. Надо сказать, что выбор пары начальных условий (НУ) или затравочных чисел (0, 1) является просто замечательным, если не сказать идеальным.

Он выполнен практически безупречно: оба НУ не равны одновременно нулю (иначе мы просто не воспроизведем последовательность); одно условие все-таки равно нулю, а другое равно 1, что все вместе приводит к наибольшему упрощению арифметических действий для вывода формул.

Исходя из специфики корней, неплохие результаты получаются и при выборе $(F_0, F_1) = (2, 1)$, чем достигается избавление от иррациональности в знаменателе, и образуется числовой ряд в виде последовательности Люка.

Изменим НУ, назначив произвольную пару чисел (f_0, f_1).

Тогда постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий, то есть из уравнений:

$$t = 0: \; C_1 + C_2 = f_0, \qquad t = 1: \; C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = f_1,$$

из которых получаем:

$$C_1 = \frac{f_1 - f_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad C_2 = -\frac{f_1 - f_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$f(t) = \lambda_1^t \frac{f_1 - f_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_2^t \frac{f_1 - f_0\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = f_1 \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{\lambda_1 - \lambda_2} - f_0\lambda_1\lambda_2 \frac{\lambda_1^{t-1} - \lambda_2^{t-1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

С учетом теоремы Виета $\lambda_1\lambda_2 = -q$ окончательно получаем:

$$f(t) = f_1 F(t) + f_0 q F(t-1), \tag{3}$$

откуда следует, что функции совпадают $f(t) = F(t)$ при $(f_0, f_1) = (0, 1)$.

При непрерывно изменяющемся параметре t функции $f(t)$ и $F(t)$ – есть комплексные. Для удобства восприятия $f(t)$ могут быть представлены реальные части, которые имеют вид разно-амплитудных синусоид с коридором их изменчивости в виде двух огибающих линий (рис. 1), описываемых следующими непрерывными функциями:

$$a(t) = f_1 A(t) + f_0 q B(t-1),$$

$$b(t) = f_1 B(t) + f_0 q A(t-1),$$

где

$$A(t) = \frac{\lambda^t + q^t\lambda^{-t}}{p'}, \qquad B(t) = \frac{\lambda^t - q^t\lambda^{-t}}{p'}.$$

$$\lambda = (p + p')/2, \qquad p' = \sqrt{p^2 + 4q}$$

Реальная часть функции Фибоначчи образно может быть охарактеризована как "*кривая таксиста*" или "кратчайшее" расстояние между двумя точками на языке водителя такси (обычного, не "маршрутки").

С одной стороны, если водитель вынужденно торопится, то пытается пробраться между мешающими ему машинами.

С другой стороны, его кривая – уже точно не мнимая, а самая что ни на есть реальная составляющая его заработка, когда прямая выглядит хуже на фоне кривой.

Характерно, что огибающие линии, являющиеся для таксиста бордюрами (коридором движения) не только ассиметричны, но и не проходят через начало координат.

И уже тем более они не имеют сходства с гиперболическими функциями.

Хотя основные свойства геометрических прогрессий налицо, что также следует из аналитически-формульного представления.

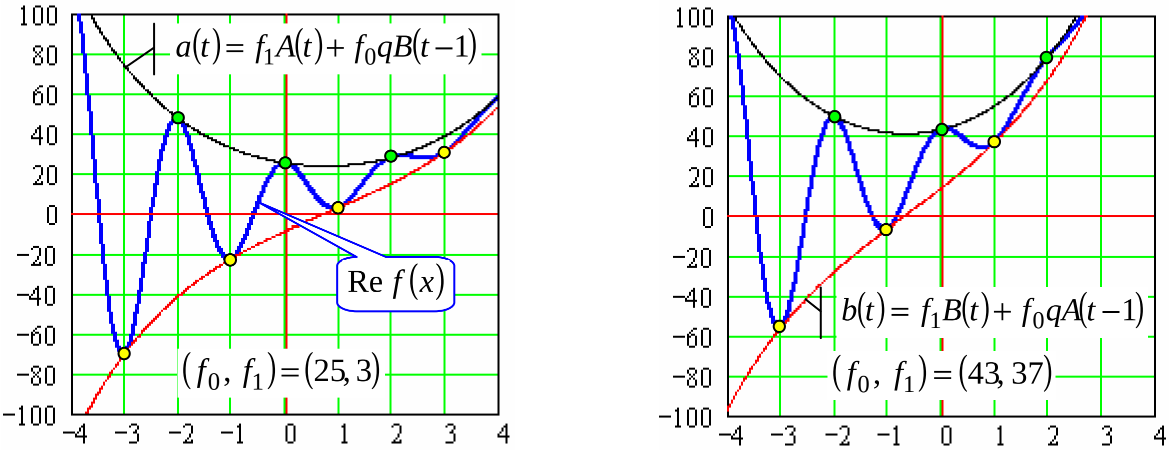

Рис. 1. Асимметрия непрерывной функции Фибоначчи – "кривой таксиста"
и её огибающих в зависимости от изменения начальных условий

Короткие "размышлизмы на ходу". Они сегодня несколько разноплановые, поэтому условно их разделим, – ну, хотя бы арабскими цифрами.

А вначале (п. 1) позволим себе сделать одно совсем маленькое отступление.

1. В некоторых работах, видимо, навеянных нашими статьями, к месту и не очень стало часто употребляться такое интересное, и даже веселенькое слово "измышлизмы", весьма похожее по звучанию на наши "размышлизмы". Нам очень нравится его певучесть, но похвастать собственным авторством, к сожалению, не можем, поскольку сами первый раз о нем услышали от Бориса Розина. Возможно, он и автор этого слова. Так что все "измышлизмы" (разных специалистов и не очень) не без грусти расставания с ними, переадресовываем ему в одну общую коллекцию-копилку с надеждой, что он найдет им достойное применение. Можем также порекомендовать по мере изучения и освоения как-то их видоизменять, например, на "осмышлизмы" (от русского слова "осмысливание"), что гарантирует стопроцентное авторство, поскольку такого слова вы больше нигде не найдете.

2. Что касается математических металлоконструкций, то в теоретическом плане мы имеем дело /в высшей степени/ с обычными пропорциями и числами, основанными на донельзя квадратном уравнении. – Как бы кто не изощрялся в их названии: металлические или стеклянные, оловянные либо деревянные и т.п. В научно-популярных работах по этой теме фактически нет элементов теоретической новизны. Да оно и естественно, так как открыть что-то новое здесь (в квадратных уравнениях) чрезвычайно трудно.

Остается надеяться, что научное сообщество в своем большинстве, безусловно, не консервативно и обязательно с удовольствием признает любого автора, который представит в этой сфере не всем известную математику, а конкретные доказательные результаты с вполне ясной, четкой и понятной "формулой открытия":

то-то и то-то, – но без голословных "заклинаний".

3. Итак, мы имеем перед глазами строго доказанное решение (2)–(3) разностного аналога квадратного уравнения с произвольными начальными условиями.

Теперь из полученного решения становятся просто очевидными причинно-следственные связи, относительно которых можно уверенно заявить (от общего к частному):

– золотое сечение не распространяет свои свойства на уравнение общего вида, которое никоим образом не становится его обобщающим кодом (!), а наоборот ЗС как губка через свойства общего решения впитывает все генетические свойства квадратного уравнения;

– золотое сечение не только вступает в законные права наследника структурных свойств и отношений, характерных для квадратного уравнения, но вдобавок насыщает их дополнительными только ему присущими свойствами, по праву формируя заслуженный нимб уникальности и неповторимости;

– образно говоря, *золотое сечение – гениальный ребенок своих родителей* – обычных квадратных уравнений общего вида, и обратного хода (влияния) на них ЗС уже не имеет.

Литература.

1. *Депман И.Я.* История арифметики: 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 418 с.
2. *История математики*: в 3-х томах. Т.1. С древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с. – http://www.math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu.
3. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
4. *Белянин В*. Владел ли Платон кодом золотой пропорции? Анализ мифа. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/182.
5. *Косинов Н.В*. Золотая пропорция, золотые константы и золотые теоремы. – http://kosinov.314159.ru/kosinov29.htm.
6. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.
7. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
8. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с.
9. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.
10. *Гегель Г.В.Ф.* Работы разных лет. В двух томах. Т.2. М.: Мысль, 1971. (Философское наследие). – 630 с. – С.530–564.