С.Л. Василенко

Клоны золотого сечения

Клоны обобщенного "золотого" сечения (ОЗС). Математики хорошо знают, что обобщать легче, чем конкретизировать. Но обобщение должно быть обосновано. Как только человек начинает без обоснований грешить "квантором всеобщности", жди беды.

> «Обобщение представляет собой законный и необходимый метод математического исследования. Это не что иное, как индуктивный метод естествознания в применении к математическим фактам: после изучения некоторого числа отдельных фактов находят нечто общее между ними и создают понятие, позволяющее рассмотреть их с единой точки зрения. Так создаются все теории, и в этом смысле обобщение лежит в основе науки. Первым великим обобщением в математике была геометрия Евклида» [1].

Известно, что с помощью циркуля и линейки можно выполнить: все 4 арифметические действия и извлечение квадратного корня. При этом существует критерий разрешимости в радикалах уравнения любой степени (Абель, Галуа).

В целом, уже общее уравнение пятой степени в радикалах неразрешимо.

Простой вопрос: что общего в уравнениях $x^2 = x+1$ и $x^7 = x^6 + 1$ или их решениях?

– Одно разрешимо в радикалах, другое не разрешимо.

– Одно имеет аналитическое (явное) решение, иное не имеет.

– Первое строится с помощью циркуля и линейки, второе не строится.

Математики-теоретики последним так дорожат, что, например, великий Гаусс, доказав возможность геометрического построения правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки, завещал его начертать на своей могиле.

Но разве это аргументы, когда нельзя, но сильно хочется?

Так и рождаются клоны ОЗС, – в виде тех же решений уравнения $x^n = x^{n-1} + 1$.

Нами уже неоднократно ставился об этом вопрос, что в разных аспектах освещено в ряде статей [2–7]. Повторяться особо не хочется.

Отметим только некоторые моменты.

Краткая аргументация:

1. ЗС – константа, а константы не обобщаются.
2. ЗС имеет строгое геометрическое построение, ОЗС не имеют.
3. ЗС разрешимо в квадратных радикалах, практически все ОЗС не имеют аналитических решений, а решаются численными методами.

Довольно легко составить еще сотни, тысячи разнообразных подклассов алгебраических уравнений, которые содержат ЗС своим частным случаем, но при других степенях характеристического многочлена "уводят решение" в совершенно иные плоскости, далекие от числа Ф. Об этих числах-корнях можно точно сказать только одно: они не являются трансцендентными.

Можно ли в таком случае считать их обобщением самого ЗС? – Конечно, нет.

В противном случае это элементарно безграмотно и является псевдопереводом всей линейной алгебры на интерпретацию ЗС.

Но что-то все-таки подобные уравнения группируют вокруг себя? Безусловно, да.

Они образуют подклассы алгебраических уравнений с теми или иными свойствами и решениями в виде самых разнообразных действительных корней, одним из которых в отдельных случаях может быть число Ф.

Уравнение, возможно и обобщается, но каждое решение – индивидуально.

ЗС нельзя обобщить, поскольку ЗС – собственное имя конкретного числа.

Это все равно, что деревья считать ... обобщенными дубами.

В частности, *можно говорить о расширении задачи*. – Как о примерке некоторых свойств ЗС на числовые объекты иной природы, когда не исключается, что отдельные свойства под тем или иным углом (призмой, ракурсом) могут найти отображение или его отблески (блики) в других предметах. Но означает ли "отраженный зайчик", что мы обобщаем само ЗС? – Конечно же, нет!

Не проходите мимо ... искусства обобщения. По логическому словарю Н. Кондакова «обобщение – мысленное выделение каких-нибудь свойств, принадлежащих *некоторому классу* предметов, и формулирование такого вывода, который распространяется на каждый отдельный предмет *данного класса*» [8, с. 395]. В данном определении сделан чрезвычайно важный акцент – это выбор класса и невыход из него, что означает, если мы рассматриваем свойство ЗС, то ЗС – это класс (из одного объекта), и мы из него не должны выходить, то есть свойство ЗС остается свойством самого ЗС и ни на что более не распространяется.

Так и обобщая дуб, мы выходим на деревья (как новый класс), но деревья – уже не обобщенные дубы, поскольку теряют его индивидуальность.

В качестве обобщения понятия "дерево" нередко предлагают понятие "лес". Конечно же, лес является неким целым по отношению к деревьям, из которых он состоит, но обобщить понятие – значит подобрать не целое для части, а род для вида [9].

Следовательно, правильным обобщением понятия "дерево" будет понятия стилистического ряда: Растение – Объект флоры – Живой организм и т.п.

Так, и отбросив признак «иметь один электрон» от содержания понятия "атом водорода", мы превращаем его в понятие "атом химического элемента", которое будет родовым по отношению к исходному видовому понятию "атом водорода" [9].

Но никому и в голову не приходит назвать железо или золото обобщенным водородом.

Поэтому всякого рода обобщения самого ЗС – забавные манипуляции и научная недобросовестность с авторской претензией на броскость или эффектность, дабы отличиться, и не более того.

К сожалению, а может к счастью, ЗС не является фундаментальным понятием науки или отдельной дисциплины, и формально заступиться за него некому. Вот и образуются клоны ОЗС. Хотя рассматривая общую задачу, нужно абстрагироваться от частного (золотого сечения), как будто его и не существует, но подспудно все время держать его в голове для примерки на него новых знаний и проверки новых закономерностей.

Хлорофилл можно изучать и на примере листьев дуба. Но делать обобщение о самом хлорофилле нужно не от имени дуба, а от имени всех зеленых растений, забыв при этом на время, что дуб вообще существует. Это и есть искусство обобщения.

Не хлорофилл обязан дубу, а дуб своим существованием обязан хлорофиллу!

В этой связи иногда цитируют Д. Пойа: «Обобщение есть переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, содержащего данное.... Мы часто делаем обобщение, переходя от одного лишь предмета к целому классу, содержащему этот предмет» [10, с. 34].

Но не следует забывать, что Д. Пойа – математик, соответственно мыслит ее категориями и то, о чем он говорит, является обобщением или расширением задачи, и только так его следует понимать, – без перенесения свойств обобщаемого на остальные предметы, когда обобщается не понятие, обобщается задача. А это совершенно разные представления.

Действительно, «в переходе от треугольников к многоугольникам с n сторонами, мы заменяем постоянную переменной, фиксированное число 3 переменным числом, ограниченным только неравенством $n \geq 3$» [10, с. 34]. И пятиугольник становится частным случаем многоугольников, но никто его не называет обобщенным треугольником.

Для ЗС это означает, что *мы обобщаем не само ЗС, а задачу деления отрезка на две части*, заранее зная, что такое деление возможно из опыта того же ЗС.

Представим себе, что ЗС как понятия нет, а слово "золотое" в математике не используется. Но остается сечение отрезка на две неравные части, остается пропорция и т.д.

Что в таком случае означают, например, "золотые p-сечения"?

В данном мысленном эксперименте это пустое множество, хотя понятия "p-сечения" или "p-числа" вполне реальны и остаются независимо от степени их золочения.

Предъявите документы...

Проведем условные параллели с 10-й проблемой Гильберта об универсальном методе по разрешимости диофантового[1] уравнения (ДУ): придумать процедуру, которая могла определить (за конечное число операций), является ли ДУ разрешимым в рациональных целых числах. Она успешно разрешена в 1970 г. российским математиком Ю. Матиясевичем, который завершил доказательство алгоритмической неразрешимости задачи о существовании решений у произвольного ДУ тем, что *он предъявил 10 ДУ* первой и второй степени, которые задают условие $b = F_{2a}$, где F_k – k-ое число Фибоначчи [11, 12].

Воспользуемся данным опытом, строго выверенным математически.

Прежде всего, чтобы конкретизировать операцию клонирования "ОЗС", по логике требуется дать точное определение, а что же такое ОЗС, и какими средствами его можно реализовать. Но в том-то и дело, что самостоятельной области действия ОЗС, которую можно втиснуть в рамки определения, как раз и нет.

Есть что-то вроде отсебятины в виде названия, исходя из похожести по внешним признакам типа "пингвин – водоплавающая сорока", поскольку оба имеют ... черно-белый окрас. В нашем случае название ОЗС связано с корнями алгебраических уравнений, которые в своих частных проявлениях могут вырождаться в квадратное уравнение ЗС.

Еще одна параллель (правда, несколько отдаленная) у нас просматривается с хорошо известной теоремой бельгийского врача Э. Цекендорфа: каждое натуральное число может быть представлено единственным образом как сумма различных чисел Фибоначчи, в которой *два соседних числа Фибоначчи никогда не используются*.

Можно сказать, что ЗС как предел отношения двух соседних чисел Фибоначчи, этим самым как бы незримо обособляется или дистанцируется от других чисел. Это дополнительно расширяет общую философскую основу понимания того, что золотое сечение – уникальная песчинка в мире чисел, ни с чем несравнимое, ни на кого не похожее, и в принципе не обобщаемое даже в кругу своих чисел, которые его же и порождают.

Какой же реальный путь разрешения мифологии "ОЗС", когда перестает срабатывать элементарная и практически всем понятная логика.

Остается дополнительно включить апробированный метод Ю. Матиясевича.

В нашей транскрипции его можно представить следующим образом.

А зачем собственно бороться с создателями ветряных мельниц?

А не лучше ли и нам поддержать золотоискателей "философского камня ОЗС" в их, искренних устремлениях, предложив еще массу несметно-бессчетных вариантов ОЗС так, чтобы саму мысль золочения пропорций довести до полной бессмыслицы.

Поэтому, как уже отмечалось [13], идею ОЗС будем «теперь поддерживать, пополняя копилку псевдозолотых сечений новыми формулами. И как знать, насколько быстро и чем закончится этот процесс... Либо он дойдет до такого гиперболизированного состояния, когда со всей очевидностью станет понятной его абсурдность. Либо он разовьется до немыслимых масштабов, заполнив собой всю числовую ось, как в свое время мнимые числа заполнили собой плоскость». Когда воочию станет понятна алогичность любого "ОЗС", – в смысле золочения, и более понятной представится вся его нелепость.

И как Ю. Матиясевич предъявлял свои 10 диофантовых уравнения, мы начнем вторую серию предъявлений псведо-ОЗС так, что в перспективе постепенно заполним ими если не всю числовую ось, так отрезок единичной длины (как прообраз целого) – уж точно.

Итак, для начала приведем рисунки деления отрезка на основе алгебраических уравнений, которые в частном случае могут иметь решение в виде ЗС (рис. 2 – рис. 5).

В данном случае они описываются уравнениями

---

[1] Диофантово уравнение (уравнение в целых числах) – это уравнение с целыми коэффициентами и неизвестными, которые могут принимать только целые значения (положительные, отрицательные, нуль). Они названы в честь древнегреческого математика Диофанта [http://ru.wikipedia.org]. Проблема их решения хорошо известна. Например, уравнение $2x - 2y = 1$ не имеет решений в области целых чисел, так как его левая часть всегда является четным числом. Уравнение $3x = 6$ имеет единственное решение $x = 2$. Некоторые другие уравнения имеют конечное число решений и т.д.

$$x^{m+k}\left(x^2-x-1\right)=\pm\, d\left(x^{m-l}-1\right). \qquad (1)$$

Комбинируя в широком диапазоне целочисленные параметры (m, k, l, d), мы приходим к самым разным сечениям так, что охватываем ими практически весь единичный отрезок.

Если степенной параметр $m=l$, то данное уравнение приводится к золотому сечению.

Мы сейчас не высказываемся об их полезности или возможностях использования.

Мы говорим о том, что, по меньшей мере, наивно считать все решения такого уравнения кодами или обобщениями золотого сечения только на том основании, что в частном случае $m=l$ уравнение (1) дает решение ЗС.

Золотое сечение велико и одновременно беззащитно.

Бессмысленность затеи с таким псевдообобщением становится очевидной.

В том, что эти бесконечные множества линий отражают понятие деления отрезка на две неравные части, сомнений не возникает.

Но назвать их в честь золотого сечения – у нас "язык не поворачивается".

Однако если визави их принимают, мы продолжим математическую игру дальше.

Поскольку эти линии проходят и через другие точки, они могут теперь называться и обобщениями этих точек, а не только ЗС.

Пусть, например, такая линия проходит через точку $a=0{,}72$. Тогда не только эта точка будет ОЗС, но и обратно ЗС становится обобщением этой точки a. То есть ЗС теряет свою индивидуальность и автоматически само становится обобщением других точек: ЗС – обобщенное число 7, ЗС – обобщенное пи, ЗС – обобщенное число дьявола и т.п.

Планы, прожекты, перспективы...

Следующими "обобщениями" станет бесчисленный сериал 1001-уравнений вида

$$\left(x^2-x-1\right)^n+A(x)^{n-1}=0\,,$$

которые при $n=1$ дают квадратное уравнение ЗС, где $A(x)$ – произвольный алгебраический многочлен.

Поскольку алгебраические многочлены в своем многообразии бесчисленны, ими можно начать максимально плотно заполнять всю числовую ось под общим лозунгом «Даешь ОЗС!». В том, что только их структур со временем станет больше чем всех песчинок на Земле и всех атомов мироздания сомневаться не приходится.

А за каждой структурой будут стоять свои миллиарды сечений.

Разработчикам теории фракталов и математику Кантору такое не приснилось бы и в страшном сне.

Но если и этого покажется мало, процесс продолжится по линии более общего вида

$$B(x)^{n-1}\left(x^2-x-1\right)^n+A(x)^{n-1}=0\,.$$

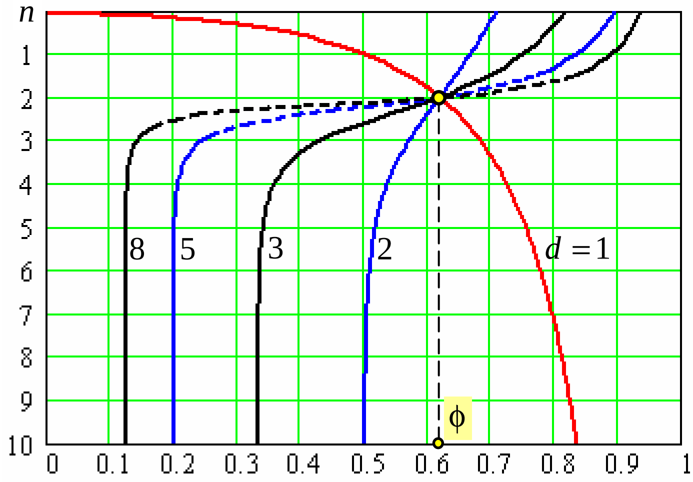
Что можно сказать на этот счет? – Не хватит никаких средств, компьютеров и людей, чтобы до конца исследовать все эти "ОЗС", которым прямой путь в бесконечно-многотомный опус "математики гармонии" с всеобщим золочением теперь уже всей науки.

Возможно, это существенно расширит поле деятельности математиков-гармонистов, хоть как-то их отвлечет от ревизорского пересмотра основ современной математики и оставляет малую надежду, что они не будут ими низвергнуты окончательно и бесповоротно, а первые попытки останутся всего лишь легким недоразумением.

Свет в конце тоннеля. Чисто условно можно говорить об "ОЗС" в кавычках как о расширении задачи пропорционального деления линейного отрезка на две неравные части, которая в простейшем случае определяется числом ЗС.

То есть "ОЗС" – это не термин или математическое определение, а некоторый художественный образ, или если угодно сленг гармонистов (от слова "гармония"), который в строгом смысле больше тяготеет к псевдонаучному понятию.

Но принимая "ОЗС" к использованию даже в качестве сленга, следует себе четко представлять всю его бессмысленность на физическом уровне, когда практически любую точку на единичном отрезке можно интерпретировать как "ОЗС" путем подбора решения соответствующего уравнения, построенного на основании математической пропорции того или иного вида.



$$x^n(x-d)+(d-1)x-1=0.$$

Например, $x^{10}=2x^9-x+1$, $x^n=3x^{n-1}-2x+1$ и т.д.

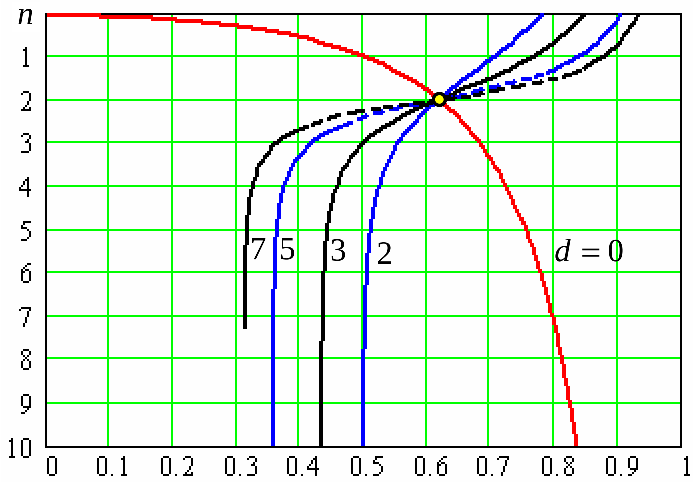
При $n=2$ дает уравнение золотого сечения.

При $d=1$ вырождается в уравнение двухзвенной старшей степени

$$x^n=x^{n-1}+1.$$

Разностный аналог имеет вид:

$$x_{n+t}=dx_{n-1+t}-(d-1)x_{1+t}+x_t.$$



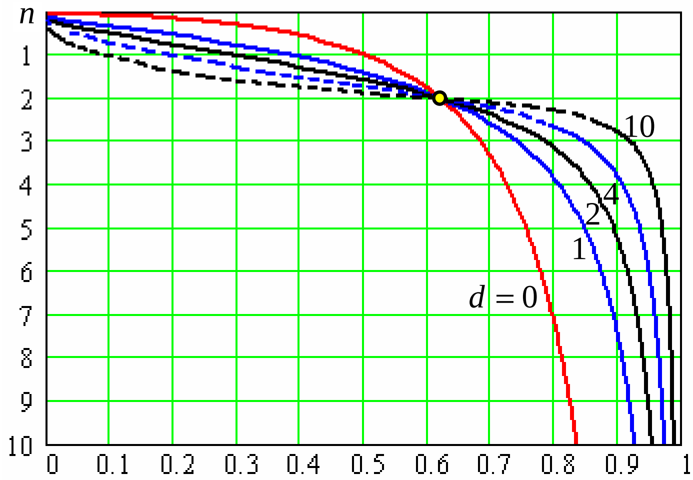
$$x^n=x^{n-1}+dx^{n-2}-(d-1).$$

Например, $x^{10}=x^9+2x^8-1$, $x^{10}=x^9+5x^8-4$ и т.д.

При $n=2$ или $d=1$ (после деления на x^{n-2}) вырождается в уравнение золотого сечения.

Разностный аналог имеет вид:

$$x_{n+t}=x_{n-1+t}+dx_{n-2+t}-(d-1)x_t.$$



$$x^n=x^{n-1}-dx^{n-2}+(d+1).$$

Например, $x^{10}=x^9-x^8+2$, $x^{10}=x^9-3x^8+4$

Разностный аналог имеет вид:

$$x_{n+t}=x_{n-1+t}-dx_{n-2+t}+(d+1)x_t$$

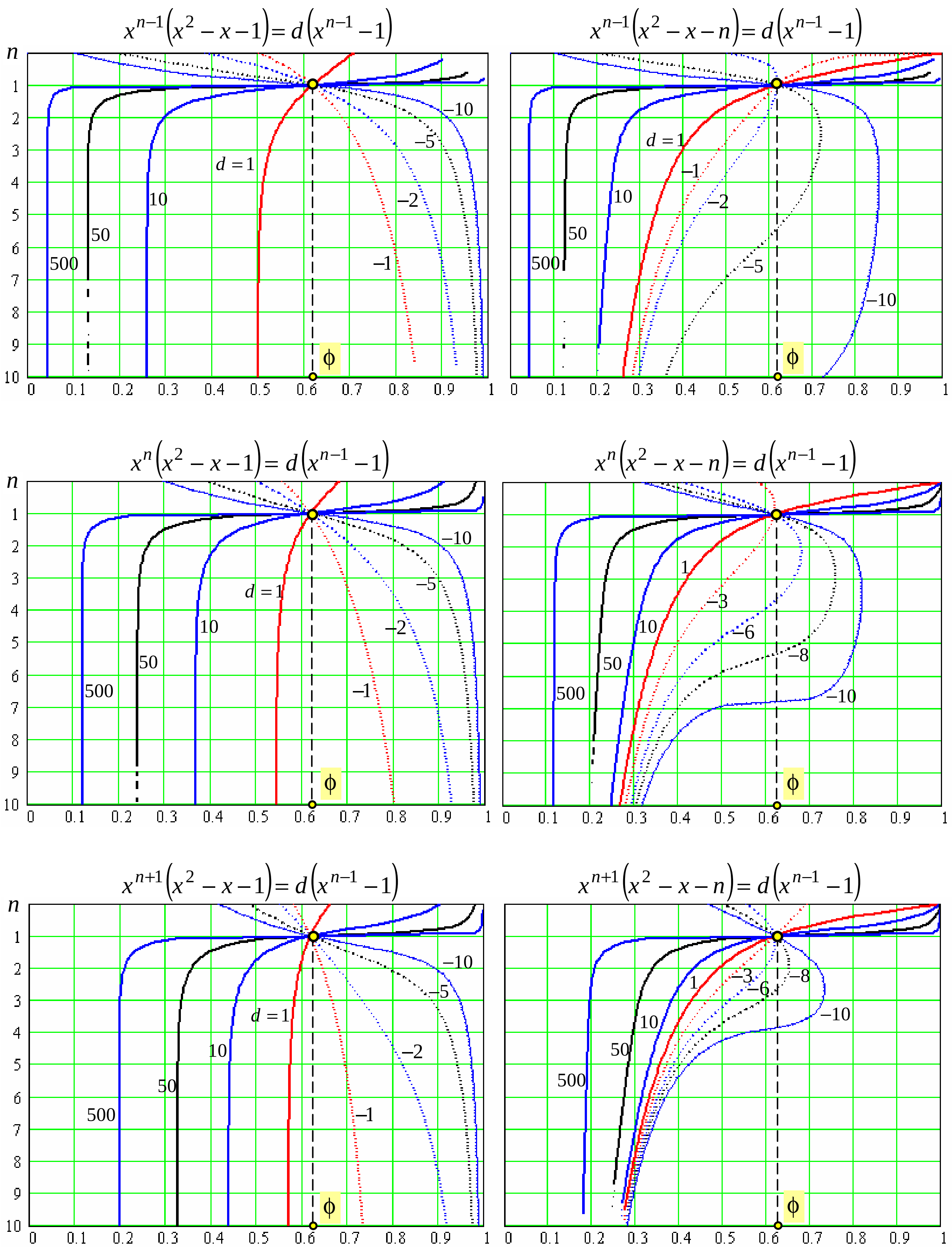


Рис. 3. Небольшая часть бесконечного многообразия бесконечных линий, которые делят единичный отрезок (внизу) на две неравные части для разных дискретных значений n и вырождаются в золотое сечение при $n = 1$

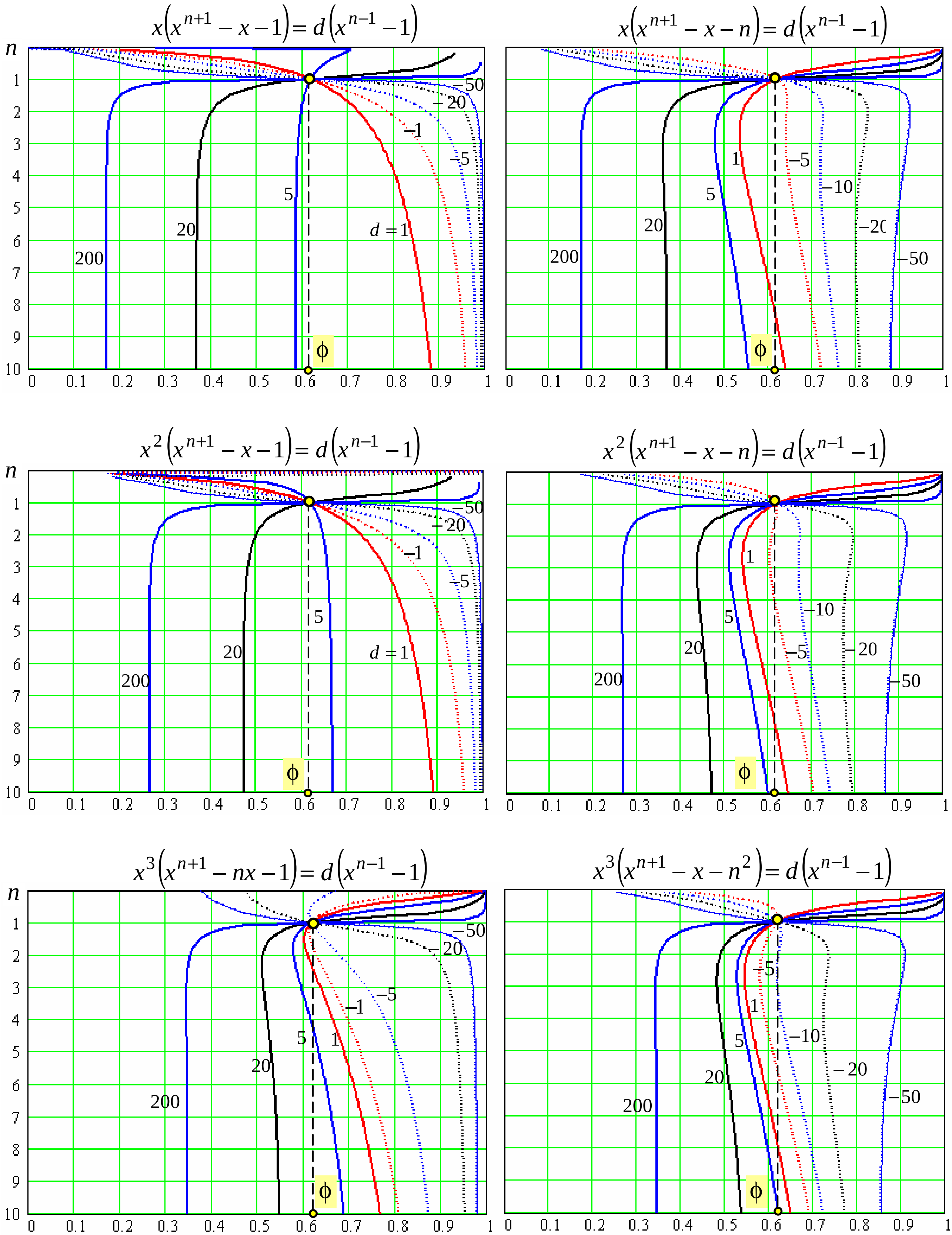


Рис. 4. Небольшая часть бесконечного многообразия бесконечных линий, которые делят единичный отрезок (внизу) на две неравные части для разных дискретных значений n и вырождаются в золотое сечение при $n=1$

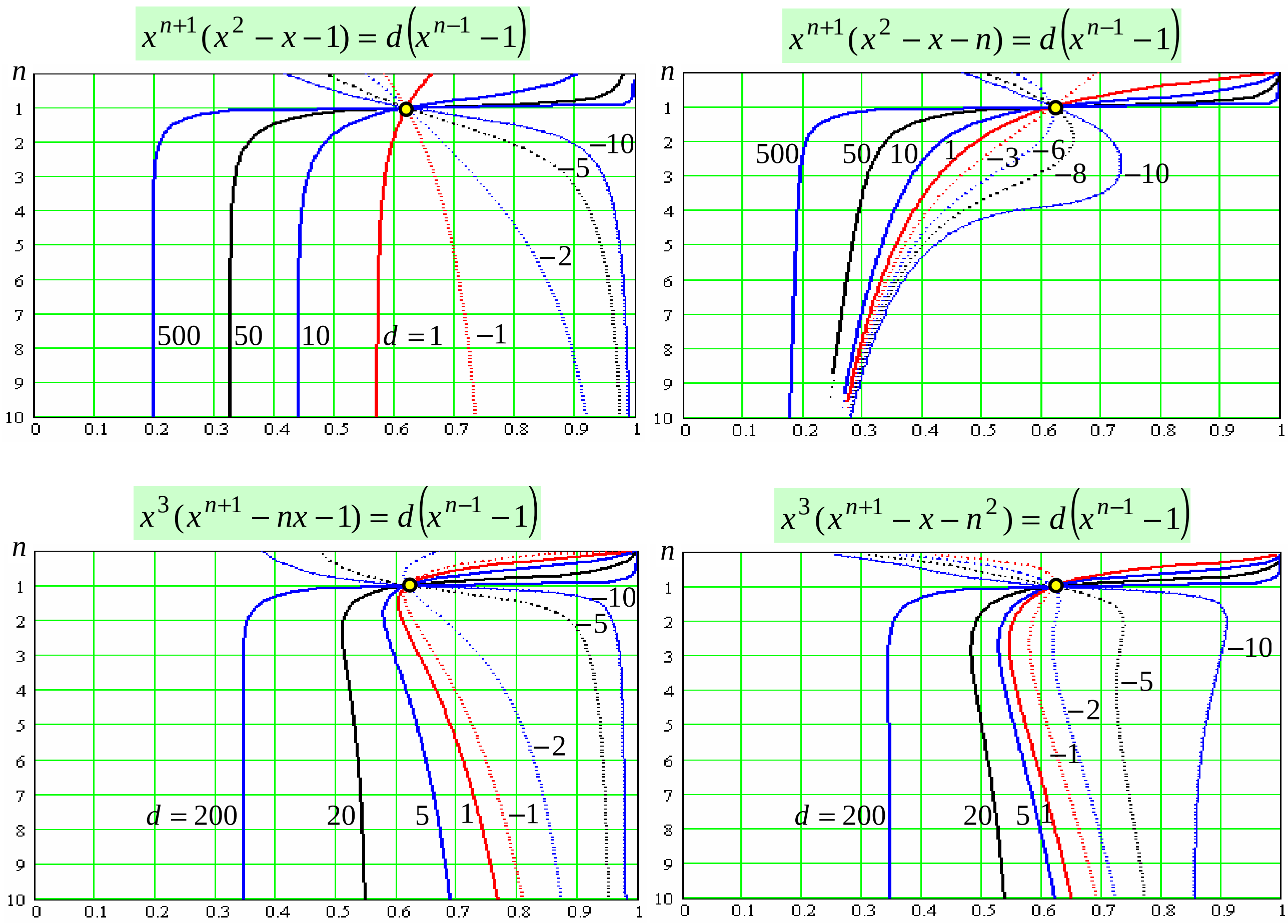


Рис. 5. Небольшая часть бесконечного многообразия бесконечных линий, которые делят единичный отрезок (внизу) на две неравные части для разных дискретных значений n и вырождаются в золотое сечение при $n = 1$

Более того, автоматически становится верным и обратный переход, когда ЗС теряет свою индивидуальность и становится обобщением бесконечных множеств других чисел только на том основании, что они находятся на одном графике или одной линии-функции.

Есть и альтернативное решение.

Во избежание двусмысленности и правильно-однозначного понимания учеными предметной области ЗС, **следует признать _паралогизм_[2] "_ОЗС_"** с его максимальным изъятием из практики научного общения.

Наука не застрахована от ошибок.

Важно только, как говорил академик П. Капица, не настаивать на своих ошибках.

Как их распознавать? Методы разные.

Один из них заключается в гиперболизации темы в крайних точках (бесконечность, нуль), где наиболее легко проверяется корректность (справедливость) общих суждений.

Поэтому мы и дальше не будем сопротивляться, если последователи ОЗС изобретут свое очередное обобщение ЗС, благо разновидностей пропорции – море.

Этой идее снова протянем руку, но постараемся ее чисто логически и строго математически довести до такого абсурда, что любая пропорция станет обобщенным ЗС, любое уравнение – обобщенным обобщением ЗС,

а само золотое сечение –
обобщенным обобщением обобщаемых общностей общих обобщаемостей ....

---

[2] Паралогизм – ложно построенное суждение в результате непреднамеренной логической ошибки [Словарь Ефремовой. – http://www.edudic.ru/efr/72430].

Литература.

1. *Фет А.И.* Пифагор и обезьяна (незаконченная рукопись), 2003. – http://modernproblems.org.ru/science/pythagor/.
2. *Василенко С.Л.* Идентификация рекуррентных рядов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.
3. *Василенко С.Л.* Асимптотика "золотого" сечения // Академия Тринитаризма, М.: Эл. № 77-6567, публ.15252 от 25.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322042.htm.
4. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm.
5. *Василенко С.Л.* Стилистический ряд индуцированных отклонений // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.15343, 15.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321118.htm.
6. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции. Часть вторая // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15349, 17.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321120.htm.
7. *Василенко С.Л.* Идентификация рекуррентных рядов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.
8. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник: 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
9. *Исскуство мышления*. – http://logiki.ru/ponyatie-logiki/5-ogranichenieiobobschenieponyatiya.html.
10. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
11. *Матиясевич Ю.В.* Десятая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1993. – 224 с.
12. *Варпаховский Ф.П., Колмогоров А.Н.* О решении десятой проблемы Гильберта // Квант. – 1970. – № 7. – С. 39–44.
13. *Василенко С.Л.* Квазизолотые сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15605, 18.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161559.htm.