С.Л. Василенко

Квадратичные цепные дроби (квадрацепи)

Присвячується російсько-українському досліднику А. Татаренку (Ростов на Дону) в розвиток його ідеї навколо поширення науки про гармонію всесвіту на підставі квадратичних форм *Tm*-гармонік
(*слов'янський проект*)

Более полно статью можно было бы назвать «Математические начала гармонии: разложение решений квадратных уравнений в ветвящиеся структуры цепных дробей», множество которых содержит и один из "шустрых отпрысков" в виде золотого сечения (ЗС).

Но как нельзя, кстати, вспоминаются знаменитые слова Г. Лейбница: «Математика есть поэзия гармонии, вычислившая себя, но не умеющая высказаться в образах для души».

Наши исследования, хотя и имеют явно выраженные составляющие строгого изложения математических рассуждений, но не сводятся только к этому, и являются больше средством для формирования благоприятной среды в построении математических начал гармонии.

Последнее находится только в начальной фазе своего развития с нечетко проявленным предметом и направлением исследований, что допускает внесение в изложение образно-окрашенных элементов (по Лейбницу), тем более речь идет о гармонии, когда все, что не приживется, со временем уйдет в небытие.

Не исключено и обратное явление, когда разные стили со временем спокойно закрепятся в науке о гармонии, – как обще-образующей основе всех специальностей и дисциплин. В этом контексте форма "квадрацепей" с небольшими и пока непривычными элементами аллегории позволяет расширить узко алгебраические рамки уравнения второго порядка на общую философию пропорций в бескрайнем мире гармонии, – ни с чем не несравнимым и ни к чему не сводимым понятием на уровне мироздания, пространства и времени.

В частности, заголовок "квадрацепи" олицетворяет собой две стороны:

1. В обычной жизни цепи обычно ассоциируются с последовательностями соединенных между собой колец, близких к круглым формам. В то же время выражение "квадратура круга"[1] прочно вошло в язык в качестве метафоры и красивого обозначения всякой не имеющей решения задачи [1]. То есть мы как бы беремся за изначально неразрешимую проблему, которая в классической постановке таковой и является, но что вовсе не мешает найти приемлемые строго обоснованные результаты, изменив угол зрения исследований.
2. В работе [2] установлена ветвящаяся вертикально-горизонтальная структура представления золотого сечения в виде неограниченного количества цепных (непрерывных) дробей. Можно сказать, что этим развеян еще один устойчивый миф о якобы уникальной самой медленной сходимости ЗС среди других иррациональных и трансцендентных чисел. И эту структуру мы теперь хотим примерить (от частного к общему) на квадратное уравнение, что вовсе не означает обобщение самого ЗС, поскольку обозначенные процессы идут в противоположных направлениях.

В целом же, преследуются две цели:

1. Еще раз показать некорректность обобщения самого ЗС, что в методологическом и методическом аспектах наносит непоправимый вред развитию молодой науки о гармонии.

---

[1] Формулировка задачи о квадратуре круга: для заданного круга требуется построить квадрат, равновеликий (то есть равный по площади) этому кругу. Неразрешимость квадратуры круга доказал немецкий математик Ф. Линдеман (1882).

2. Обобщить "задачу златоцепья" для квадратичного уравнения общего вида.

В достижение первой цели ставится и в основном решается задача: максимально освободиться или хотя бы дистанцироваться от терминологических наслоений, превращающих математические нивы гармонии в минные поля противоречий.

Круговерти ЗС. Золотое сечение (ЗС) – частный уникальный случай в алгебраической геометрии, описываемый квадратным уравнением с парой коэффициентов, равных единице.

Его нельзя обобщить, поскольку ЗС – собственное имя конкретного числа.

Одним из первых авторов, обративших внимание научной общественности на узость восприятия мира через "золоченые очки", стал наш соотечественник А. Татаренко.

Хотя и он не удержался и "позолотил" свои гармоники, что впрочем, нисколько не мешает с достоинством и по настоящему оценить его пионерную роль в развитии науки о пропорции и гармонии, о чем мы еще будем говорить.

Имеются ли лекарства или противоядия от всеобщего золочения математической пропорции общего вида? – Разумется, да!

В частности, *можно говорить о расширении задачи*. – Как о примерке некоторых свойств ЗС на числовые объекты иной природы, когда не исключается, что отдельные свойства под тем или иным углом (призмой, ракурсом) могут найти отображение или его отблески (блики) в других предметах.

Но означает ли "отраженный зайчик", что мы обобщаем само ЗС? – Конечно же, нет!

В хорошо известных линейных возвратных уравнениях, а также адекватных им алгебраических уравнениях и аддитивных рекуррентных последовательностях только один ряд чисел Фибоначчи (составленный по принципу "будущее = настоящее + прошлое" [3]) приводит к ЗС, причем независимо от значений первых двух затравочных чисел (начальных условий).

Но как только мы изменим хотя бы один коэффициент, или добавим – убавим хотя бы один член уравнения, или чуть сдвинем во времени учитываемую предысторию прошлого, так все золото мгновенно улетучивается. А если что и остается, так это надуманные авторские наслоения, которые мы образно называем "позолотами-висюльками", что по смыслу адекватно русской поговорке: "не все золото, что блестит".

Хотя ничто нам не мешает, а многие математики так и делают, называть новые рекуррентные соотношения обобщенными последовательностями Фибоначчи.

Но все они приводят к аттракторам, не имеющим ничего и близко схожего с идеей ЗС, – за редчайшим исключением, когда эти последовательности являются тривиальным повторением исходной.

Искусство обобщения. По логическому словарю Н. Кондакова «обобщение – мысленное выделение каких-нибудь свойств, принадлежащих *некоторому классу* предметов, и формулирование такого вывода, который распространяется на каждый отдельный предмет *данного класса*» [4, с. 395].

В данном определении сделан чрезвычайно важный акцент – это выбор класса и невыход из него, что означает, если мы рассматриваем свойство ЗС, то ЗС – это класс (из одного объекта), и мы из него не должны выходить, то есть свойство ЗС остается свойством самого ЗС и ни на что более не распространяется.

Так, например, обобщая дуб, мы выходим на деревья (как новый класс), но деревья – уже не обобщенные дубы, поскольку теряют его индивидуальность.

В качестве обобщения понятия "дерево" нередко предлагают понятие "лес". Конечно же, лес является неким целым по отношению к деревьям, из которых он состоит, но обобщить понятие – значит подобрать не целое для части, а род для вида [5].

Следовательно, правильным обобщением понятия "дерево" будет понятия стилистического ряда: Растение – Объект флоры – Живой организм и т.п.

Так, и отбросив признак «иметь один электрон» от содержания понятия "атом водорода", мы превращаем его в понятие "атом химического элемента", которое будет родовым по отношению к исходному видовому понятию "атом водорода" [5].

Но никому и в голову не приходит назвать железо или золото обобщенным водородом.

Поэтому всякого рода обобщения самого ЗС – некорректны.

К сожалению, а может к счастью, ЗС не является фундаментальным понятием науки или отдельной дисциплины, и формально заступиться за него некому.

Вот и образуются многобразные псевдообобщения ЗС.

Хотя, рассматривая общую задачу, нужно абстрагироваться от частного (ЗС), как будто его и не существует, но подспудно все время держать его в голове для примерки на него новых знаний и проверки новых закономерностей.

Логические лабиринты. Хлорофилл можно изучать и на примере листьев дуба. Но делать обобщение о самом хлорофилле нужно не от имени дуба, а от имени всех зеленых растений, забыв при этом на время, что дуб вообще существует.

Это и есть искусство обобщения.

Не хлорофилл обязан дубу, а дуб своим существованием обязан хлорофиллу!

В частности, по нашему предмету исследований это означает следующее.

Если мы обнаружим "квадрацепье" с его частным случаем в виде "златоцепья", то тогда и уникальность ЗС по целому ряду позиций должна рассматриваться обычным частным случаем квадратного уравнения, что существенным образом может поменять наши представления или мировосприятие и поставить лошадь не посреди телеги (по В. Черномырдину), а, как и положено, – впереди. А вот ЗС очень даже хорошо смотрится и посреди телеги.

В этой связи иногда цитируют Д. Пойа. Что можно сказать? Он действительно великий математик. Но либо он слабый философ в части обобщения, либо не может четко изложить свои мысли, или мы очевидцы издержек перевода с английского на русский.

Читаем: «Обобщение есть переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, содержащего данное.... Мы часто делаем обобщение, переходя от одного лишь предмета к целому классу, содержащему этот предмет» [6, с. 34].

Вроде все правильно. Но тогда почему на основании этого некоторые делают вывод о правомочности "золотых Tm-гармоник", "золотых p-сечений" и т.п.

Но логический клубочек сопоставлений легко нас выводит из лабиринта.

Дело в том, что Д. Пойа – математик, и соответственно мыслит ее категориями.

То, о чем он говорит, является обобщением или расширением задачи, и только так его следует понимать, – без перенесения свойств обобщаемого на остальные предметы.

Обобщается не понятие, обобщается задача.

А это два совершенно разных представления.

Действительно, «в переходе от треугольников к многоугольников с n сторонами, мы заменяем постоянную переменной, фиксированное число 3 переменным числом, ограниченным только неравенством $n \geq 3$» [6, с. 34]. И пятиугольник становится частным случаем многоугольников, но никто его не называет обобщенным треугольником.

Для ЗС это означает, что мы обобщаем не само ЗС, а задачу деления отрезка на две части, заранее зная, что такое деление возможно из опыта того же ЗС.

Представим себе, что ЗС, как понятия, нет, а слово "золотое" в математике не используется.

Но остается сечение отрезка на две неравные части, остается пропорция и т.д.

Что в таком случае означают "золотые p-сечения"?

В данном мысленном эксперименте - ничего, хотя понятия "p-сечения" или "p-числа" вполне реальны и остаются независимо от степени их золочения.

"Капля в море" или ЗС в безбрежном океане алгебраических уравнений. Не будем забывать, что помимо геометрического толкования, где ЗС стало видовым понятием по отношению к исходному родовому понятию "деления отрезка", ЗС – это и корень сáмого простого квадратного уравнения.

И вполне естественно, что поведение некоторых легко устанавливаемых свойств ЗС мы спокойно можем изучать на примере других более сложных алгебраических уравнений.

Но если само ЗС не обобщается в принципе, то выработанные подходы к его исследованию можно продолжить далее на остальных более сложных уравнениях.

Так, если яблоко – аппетитное, то почему мы не проверить его вкус на других объектах похожей формы, – тех же яйцах? Но если яйцо тоже покажется вкусным, все равно нас курица не поймет и не согласится, когда станем ей доказывать, что она несет обобщенные яблочки.

Таким образом, обобщение понятия – логическая операция перехода *от видового к родовому понятию* с помощью исключения из его содержания каких-либо признаков[2], и этим все сказано. В нашем случае мы переходим от ЗС к квадратному уравнению общего вида, с которым работаем так, как будто ЗС вообще никогда не существовало, нет, и никогда не будет. Но это не мешает уже ИЗВЕСТНЫЕ ЗНАНИЯ ПРО ЗС, как частный случай уравнения, примерять (расширять либо развивать, раскручивать дальше, обобщать) к другим коэффициентам, но, не трогая само ЗС и его терминологию, словно их нет (испарились, провалились, исчезли и т.п.).

Если и в такой транскрипции не понятно, то можно порекомендовать великолепный логический словарь Н. Кондакова [4].

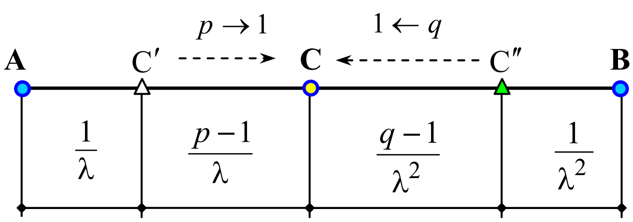

Рис. 1. Деление отрезка $AB = 1$ в пропорции согласно квадратному уравнению: $p \geq 1, q \geq 1$

Геометрия отрезка. Рассмотрим свойства сечений на примере геометрического сопоставления частей линейного отрезка (рис. 1).

В общем случае $p \geq 1, q \geq 1$ имеем

$$\lambda = \frac{AB}{AC/p} = \frac{AC/p}{CB/q} = \frac{AC'}{C''B} \qquad \text{или}$$

$$\lambda = \frac{AC + CB}{AC/p} = p + \frac{1}{\frac{AC/p}{CB}} = p + \frac{q}{\lambda}.$$

Отрезок $C'C'' = \frac{p-1}{\lambda} + \frac{q-1}{\lambda^2}$ при $p, q \to 1$ "стягивается" в точку С, вырождаясь в сечение с числом Ф.

Таким образом, параметр q "отвечает" за пропорциональное уменьшение меньшей ($CB \to C''B = CB/q$) или соответствующее увеличение бóльшей части целого, а параметр p – за уменьшение его бóльшей части ($AC \to AC' = AC/p$) или увеличение меньшей.

Так мы приходим к общей характеристике «квадратичной пропорции»

Целое так относится к p-й доле Большего, как она относится к q-й доле Меньшего.

Можно сформулировать адекватное положение и на языке геометрических отрезков:

Целое так относится к p-й части Большего отрезка, как она – к q-й части Меньшего.

Но не будем идеализировать геометрические образы (точки, прямые, отрезки, плоскости, углы, шары и прочие объекты). Хорошо известно, что "предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, населенный этими идеальными геометрическими объектами и который всего лишь похож на мир реальный» [1].

Но не давая ответ на вопрос, как оно есть в реальном мире, математика все ж помогает понять,

[2] Философский словарь. – http://philbook.ru/content249007/.

как оно может быть! Именно поэтому она и привлекается.

Так или иначе, но p отвечает за масштабирование большей части, q – меньшей части.

Это и естественно, поскольку в разностном виде уравнение имеет вид $x_{2+t} = px_{1+t} + qx_t$, и в условиях аддитивного роста чисел при их суммировании величина $x_{1+t} > x_t$.

Уже из самих формулировок очевидным образом следует, что такая пропорция не имеет ничего общего с золотым сечением, поскольку ЗС соотносится исключительно с самими элементами целого, а не с их долями (от большей и от меньшей части).

Пропорция компонентов и пропорция долей или частей этих компонентов – совершенно разные смысловые и математические конструкции.

Квадратное уравнение в общем случае оперирует с долями составляющих. В результате этого мы выходим на радикалы совершенно иной природы, не связанные с корнем из пяти.

Проводя аналогии, можно сказать, что у нас много речного песка, в котором только одна золотая крупинка (ЗС). Всё остальное – порода. Но порода и золотая песчинка имеют и некоторые общие свойства: одна порождающая река (уравнение), боле или менее сопоставимые размеры: от песчинок – до крупных валунов.

Но есть отдельные особые случаи, корреспондирующиеся с ЗС.

Это тогда, когда доли большей или меньшей частей по отношению к этим частям имеют свойства ЗС.

Например, квадратное уравнение общего вида $x^2 = px + q$, в котором $p = 4k$ и $q = k^2$ или $x^2 = 4kx + k^2$, имеет положительный корень $\lambda = 2k + k\sqrt{5} = k\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

С учетом формулы $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ этот корень равен $\lambda = k(2\Phi + 1)$ или наоборот $\Phi = \dfrac{\lambda/k - 1}{2}$.

Квадрацепи как развитие славянского проекта А. Татаренко. Работы зарубежных авторов ниже упоминаются исключительно из-за претензий на пальму первенства в вопросах развития учения о гармонии, которые ими в принципе не ставились, в отличие от славянского исследователя А. Татаренко.

Самое любопытное то, что и сами авторы подобных притязаний не выставляют и, скорее всего, даже не знают об их существовании, хотя по неизвестным причинам за них это делают другие.

Так, В. Шпинадель в статье [7]:

– доказывает сходимость рекуррентной последовательности к максимальному корню квадратного уравнения, что известно более 275 лет из теоремы Д. Бернулли[3];

– дает характерные разложения в цепные дроби, которые тривиальным образом следуют из записи самого уравнения, – см. ниже соотношение (2);

– вводит "металлические" названия эмоциональной окраски для бесконечного счетного множества (ряда) классификационных объектов, что нами квалифицируется как попытка внедрения в один синонимический ряд с золотой пропорцией, и ничего кроме путаницы с собой не несет.

И такую «математику» нам хотят противопоставить действительно выстраданной философии А. Татаренко.

Но почему собственно мы должны принимать какие-то отвлеченные металлические пропорции, если речь идет о квадратных уравнениях с вполне очевидным словообразующим началом, что приводит, например, к понятному термину «квадратичных пропорций» – пропорций, основанных на решении квадратных уравнений.

С египетским исследователем М. Газале ситуация не менее интересная.

---

[3] В работе Д. Бернулли «Замечания о рекуррентных последовательностях» (1732) изложен рекуррентный метод решения линейных алгебраических уравнений общего вида, включая квадратное уравнение.

В целом его увлекательная работа [8] небезынтересна любителям математических головоломок и развлечений.

Нам же преподносят, что якобы «выведенная формула[4] задает бесконечное количество новых рекуррентных последовательностей, подобных числам Фибоначчи».

Во-первых, теория рекуррентных рядов и линейных разностных (возвратных) уравнений в математике давно известна и описана, в частности, А. Гельфондом [9].

Сама по себе формула здесь ничего отдельно не задает, а является альтернативным описанием ряда в явном или аналитическом виде, но именно потому и только этим она интересна, хотя сами ряды спокойно генерируются по рекурсии.

Во-вторых, следует заметить, что широко разрекламированную формулу он таки не вывел.

Да, она достоверна, но не исключено, что получена им эмпирически, а самого вывода (доказательства) он даже не знает, и предлагает это вместо него проделать читателям, не давая конкретных посылов.

Да и что мы хотим, если профессор кафедры математической лингвистики Г. Мартыненко (С-Петербург) в своих работах [http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0687-00.htm] говорит об "уравнение Газале", равно как и об "уравнение Стахова" (?).

Хотя в математике доподлинно известно, что алгебраическое уравнение n-й степени не расчленяется по авторам, однако, в их честь могут называться конкретные методы решения и теоремы по этому уравнению: Кордано, Декарта–Эйлера, Феррари, Рауса–Гурвица, Льенара–Шипара, Штурма и др. [10, с. 37–45].

То есть авторизуется решение, а не уравнение. Ни М. Газале в своем "Гномоне" [8], ни А. Стахов в своих работах подобных решений в общем виде никогда не предлагали.

В целом вызывает только удивление, как некоторые ученые быстро отмахнулись не только от *Tm*-гармоник А. Татаренко – действительно пионерной идеи в части развития науки о гармонии мироздания, но, по сути, нивелировали ее как славянский проект[5].

Тем самым они "размазали" действительный приоритет славянской школы среди зарубежных, в основном англоязычных авторов, имеющим к идее А. Татаренко весьма и весьма отдаленное отношение, разве что общностью математики, – в части известного со школьной скамьи тривиального решения квадратного уравнения.

Поэтому легкую иронию вызывает наивность А. Никитина [11], взывающего к справедливости тех, кто вчера фактически подменил идею *Tm*-гармонии на "аргентинский металл" [7], а завтра скажет: зачем менять, когда *все* к этому привыкли.

Поскольку речь идет о законном авторстве нашего соотечественника, то и тон должен быть здесь соответствующий, допускающий наравне со скромно-просительными интонациями [11] и более требовательные ноты.

Обсудим этот момент чуть подробнее, спокойно и непредвзято.

А судьи кто? Хотя длинные цитаты противоречат правилам хорошего тона, но одну из выдержек необходимо продекламировать полностью:

«И если еще в 2005 г. цитированное выше высказывание Александра Татаренко[6] вызывало у меня раздражение, то сейчас, после создания новой теории гиперболических функций, основанных на математическом открытии Татаренко, мне не остается ничего другого, как снять шляпу перед

---

[4] Речь идет про обобщение формулы Бине для частного случая квадратного уравнения $x^2 = px + 1$.

[5] В целом проект еще не развалился окончательно. Так, в честь уважаемого профессора названо алгебраическое "уравнение Мартыненко", хотя нам сдается, что эти усилия по товарищеской (славянской) поддержке могли бы найти более достойное применение, – на восстановление того же реноме А. Татаренко.

[6] *Татаренко А.А.* "*Tm*-принцип" – всемирный закон гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12575, 10.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm.

Александром Татаренко, который не только сделал выдающееся математическое открытие, но и осознал его значение для будущего развития науки» [12].

Такая характеристика, по нашему мнению, не служит истине из следующих соображений:

1. Говорить о математическом открытии А. Татаренко [13], – нарочито делать ему медвежью услугу, поскольку ни открытия в области математики, ни самой математики у него нет. Никакая Академия Наук это никогда не зафиксирует, и подобный пафос ему только вредит.

Мы также далеки от мысли, что это фарисейство или политика двойных стандартов.

Но чтобы убедиться в искренности слов и окончательно развеять все сомнения, хорошо бы удостовериться по тому, как «выдающееся математическое открытие» А. Татаренко освещено в широко разрекламированной книге «The mathematics of harmony» для англоязычного читателя. – Одну страничку на языке оригинала нетрудно поместить в Музее Гармонии, где воочию можно убедиться в первенстве славянской науки по данному вопросу.

2. «Снять шляпу» – достойно похвалы и уважения, но это лишь означает восстановление дипломатических отношений. Однако «воз пока и ныне там», и вместо красивых *Т-гармоник* мы по-прежнему слышим режущий скрежет металла.

Поэтому "дело еще не в шляпе", что, в частности следует даже из названия статьи [12]. А без реального восстановления авторской терминологии А. Татаренко, или хотя бы без выпячивания другой (ему наперекор), все остальное – не более чем суесловие.

3. Выставлять эфемерный «Приоритет Александра Татаренко в открытии новых математических констант Природы» [12] – значит, де-факто, снова нивелировать его роль, поскольку данная словесная форма работает не на имидж, а во вред и против автора:

– Константы вовсе не новые, им столько же лет, сколько квадратному уравнению и иррациональным числам.

– Сами по себе числа с упоминаемыми радикалами не являются открытием.

– Данные математические константы к Природе имеют весьма отдаленное отношение, поскольку это абстракции. Теоретически они могут моделировать отдельные природные процессы или явления, но на сегодня такие случаи практически не зарегистрированы.

4. Теория так называемых гиперболических функций Фибоначчи и Люка (ГФФЛ) и близко не имеет отношения к идеям А. Татаренко. А. Татаренко – автор новой парадигмы в изучении гармонии, что ранее до него крутилось только вокруг ЗС. То есть ему принадлежит идея комплексного рассмотрения гармонии на основе многовариантных пропорциональных отношений.

Эта пионерная идея в пристяжных не нуждается и только отягощается их путами.

Более того, как будет показано ниже строго математически, она развивается далее и на случай квадратного уравнения общего вида, когда ГФФЛ не просто не работают, но становятся обременительным грузом, заводящим решение проблемных задач в тупик.

Все бы и ничего, но причем здесь ГФФЛ, которых как самостоятельных объектов, не существует [14, 15], а вместо них – две огибающие линии к непрерывной функции Фибоначчи, составляющие одно целое, немыслимое без своих частей, также как и части немыслимы без своего целого.

Мир "квадрацепей". Несмотря ни что славянский проект А. Татаренко [13] продолжает развиваться.

Так, на основе метода индукции и метода производящих функций нами строго доказана обобщенная формула [16] (для квадратного уравнения общего вида)

$$f_t = \frac{\lambda^t - (-q)^t \lambda^{-t}}{\sqrt{p^2 + 4q}}, \qquad (1)$$

где $f_{t+2} = pf_{t+1} + qf_t$ – линейный разностный (возвратный) аналог квадратного уравнения или аддитивно-рекуррентная обобщенная последовательность Фибоначчи с начальными условиями $(f_0, f_1) = (0, 1)$.

Она уже помогла решить важную задачу о реальной значимости ГФФЛ, которые на поверку являются обычными огибающими кривыми (в теории дифференциальной геометрии) к непрерывной (комплексной) функции Фибоначчи [15] со всеми вытекающими последствиями.

Кстати формы этих кривые элементарно вытекают из самой формулы (1) в виде $\dfrac{\lambda^t \pm q^t \lambda^{-t}}{\sqrt{p^2 + 4q}}$ без всяких надуманных связей с гиперболичными функциями.

Эта же формула (1) помогает нам выстроить общую теорию по разложению каждого решения квадратного уравнения в бесконечный ветвящийся структурный комплекс бесконечных непрерывных (цепных) дробей, в чем ГФФЛ выступают абсолютным тормозом.

Так, из многих литературных источников известно, что положительный корень $\lambda = \dfrac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ квадратного уравнения $x^2 = px + q$ превращает его в тождество $\lambda^2 = p\lambda + q$ с очевидным представлением (после деления на λ) бесконечной периодической цепной (непрерывной) дробью

$$\lambda = p + \frac{q}{\lambda} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{\lambda}} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \dots}}} = [p;\, q,\, (p)]. \qquad (2)$$

$$\lambda = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \dots}}} = [p;\, q,\, (p)]$$

Рис. 1. Графика записи цепных дробей

Принятый стиль обозначений цепных дробей наглядно демонстрируется на рис. 1.

Если $q = 1$, то в записи дроби эта величина просто опускается, например $[2; (7)]$, а периодичность $(\cdots)$ не обязательно состоит только из одной цифры, допуская конструкции типа $[2; (1, 7, 3)]$ и т.п.

Но это далеко не единственное разложение, что следует из нашей теоремы.

Т е о р е м а. Наибольший корень λ квадратного уравнения $x^2 = px + q$ с целочисленными коэффициентами (p, q) имеет счетное множество разложений в цепные дроби $\lambda = \dfrac{[f_t; b, (a)]}{f_{t-1}}$ через числа аддитивно-рекуррентной последовательности (Фибоначчи) $f_t = pf_{t-1} + qf_{t-2}$ с начальными условиями $(f_0, f_1) = (0, 1)$ и элементы $a = f_t + qf_{t-2}$, $b = (-1)^t q^{t-1}$, $t = 2, 3, 4, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом обобщенной [16] формулы (1) для последовательностей Фибоначчи, удовлетворяющих разностному уравнению – прототипу алгебраическому квадратному уравнению, запишем два тождественных соотношения:

$$S=\lambda f_{t-1}-f_t=\frac{\lambda^t-(-1)^{t-1}q^{t-1}\lambda^{-t+2}}{p'}-\frac{\lambda^t-(-1)^t q^t\lambda^{-t}}{p'}=(-1)^t q^{t-1}\lambda^{-t+1}\left(\frac{\lambda+q\lambda^{-1}}{p'}\right)=\frac{(-1)^t q^{t-1}}{\lambda^{t-1}}=\frac{b}{\lambda^{t-1}},$$

$$\lambda f_{t-1}+qf_{t-2}=\frac{\lambda^t-(-1)^{t-1}q^{t-1}\lambda^{-t+2}}{p'}+\frac{q\lambda^{t-2}-(-1)^{t-2}q^{t-1}\lambda^{-t+2}}{p'}=\lambda^{t-1}\left(\frac{\lambda+q\lambda^{-1}}{p'}\right)=\lambda^{t-1},$$

где $p'=\sqrt{p^2+4q}$, $\frac{\lambda+q\lambda^{-1}}{p'}=1$.

Поставляя второе равенство в первое, имеем

$$S=\frac{b}{\lambda^{t-1}}=\frac{b}{\lambda f_{t-1}+qf_{t-2}}=\frac{b}{(S+f_t)+qf_{t-2}}=\frac{b}{a+S}.$$

Последнее равенство легко представляется в виде бесконечной непрерывной дроби

$$S=\lambda f_{t-1}-f_t=\frac{b}{a+S}=\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\ldots}}}=[0;b,(a)].$$

откуда следует $\lambda f_{t-1}=f_t+[0;b,(a)]$ или $\lambda=\frac{[f_t;b,(a)]}{f_{t-1}}$, что и требовалось доказать (рис. 2–3).

Отметим, что данное доказательство оказалось нисколько не сложнее, чем для золотого сечения [2] $p=q=1$.

Это не исключение, а скорее даже распространенное явление, когда задача в более общей постановке разрешается даже легче, чем ее отдельные частные случаи.

Примечательно, что величина $a=f_t+qf_{t-2}$ связана с еще одним рекуррентным рядом – последовательностью Люка $L_t=pL_{t-1}+qL_{t-2}$ с начальными условиями $(L_0,L_1)=(2,m)$.

Так что $a=f_t+qf_{t-2}=L_{t-1}$ или окончательно получаем еще одну запись теоремы

$$\lambda=\frac{1}{f_{t-1}}\left[f_t;(-1)^t q^{t-1},(L_{t-1})\right].$$

Заметим, что в наших рассуждениях целочисленные коэффициенты p,q принимают значения, не меньшие единицы.

Хотя ничего не мешает рассматривать и другие задачи.

Так, величина коэффициента $p=\frac{1}{s}$ с натуральным числом s образует нецелочисленные ряды. Тем не менее, решение уравнения $x^2=x/s+q$ приводится к цепным дробям с целыми числами в виде $\lambda=\frac{[2s+1,(4s)]}{2s}$.

Хотя расширенная структура цепных дробей для каждого из таких уравнений, скорее всего, уже отсутствует. Во всяком случае, она пока нами не обнаружена.

Но поиски продолжаются.

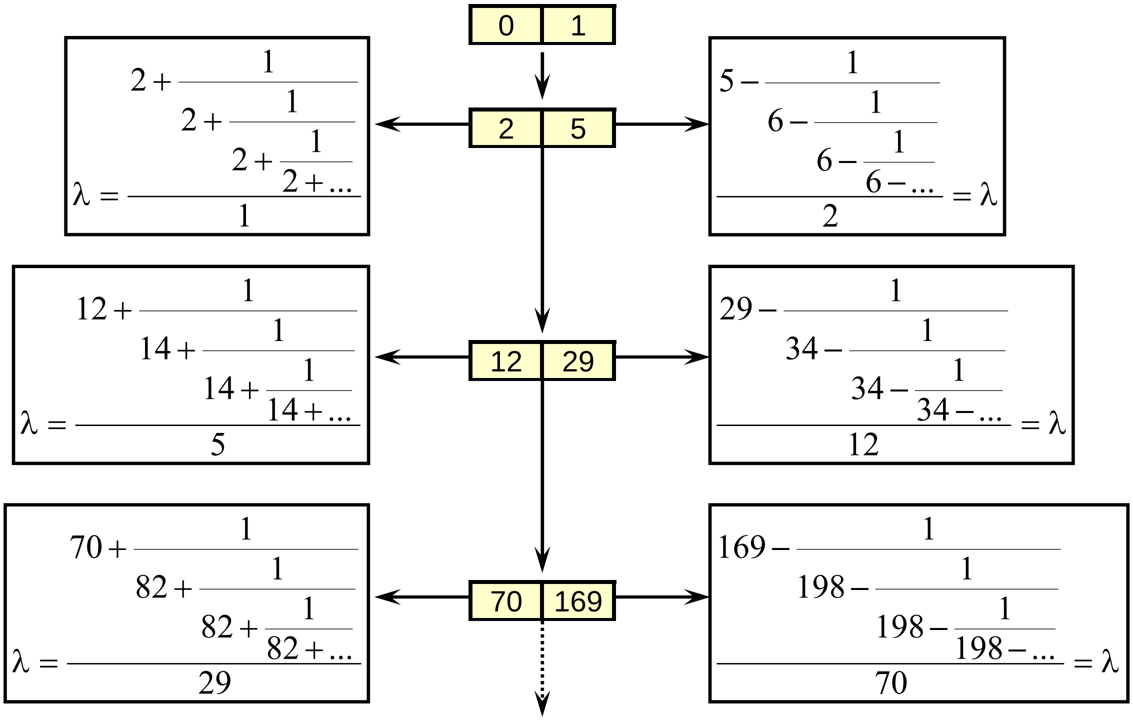

Рис. 2. Ветвящаяся вертикально-горизонтальная структура представления квадратичной гармоники $\lambda = 1+\sqrt{2}$, $(p, q) = (2, 1)$ в виде цепных дробей

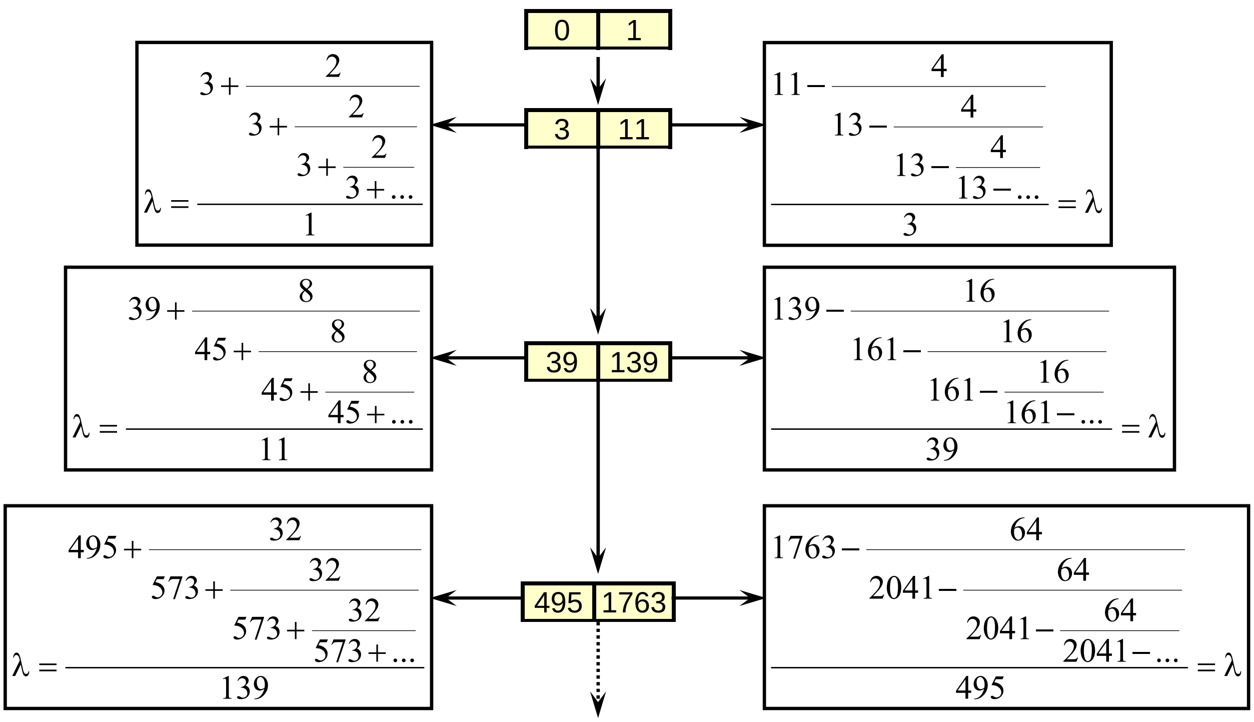

Рис. 3. Ветвящаяся вертикально-горизонтальная структура представления квадратичной гармоники $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$, $(p, q) = (3, 2)$ в виде цепных дробей

Кстати характеристическое уравнение $x^2 = x/s + q$ с его разностным аналогом $x_{2+t} = x_{1+t}/s + qx_t$ представляет определенный интерес для расширения класса квадратичной пропорции в теории гармонии и буквально имеет следующий физический смысл или интерпретацию:

Целое так относится к сумме s штук Большего, как она – к q-й доле Меньшего.

Возможно, это и выглядит несколько сложнее, чем пропорция для ЗС, но описывает вполне распространенные соотношения. Например, $s = 2, q = 1$ означает, что в пропорции сравниваются две единицы (2шт.) большего отрезка с 1 шт. меньшего отрезка.

Куда делись единицы? Согласно теореме Кузьмина [17, с. 13] вероятность появления в дробях $[a_0; a_1, a_2, ...]$ среди элементов a_i натурального числа k задается эффективной (но весьма не простой в доказательстве! [18, § 15]) формулой

$$p_k = \lg_2\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \lg_2\left(\frac{k+1}{k}\frac{k+1}{k+2}\right).$$

То есть в цепных дробях совокупного множества вещественных чисел наиболее вероятным является все-таки присутствие единицы

$$p_1 = \lg_2 4/3 \approx 0{,}42 \ ,$$

а уже потом – двойки, тройки и т.д.

Отметим, что полученные нами разложения в цепные дроби не содержат единиц, но это скорее исключение, чем правило, и вовсе не идет вразрез с теоремой Кузьмина, сформулированной для всего бесконечномерного многообразия чисел вообще.

Зато отсутствие единиц в разложение гарантирует более быструю сходимость дробей к своим аттракторам в виде корней квадратных уравнений. Также как отсутствие единиц в школе является косвенным признаком хорошей успеваемости, а значит, характеризует «лучшую сходимость к новым знаниям».

Отметим, что сходимость – это не только вычисление на ЭВМ. В целом это далеко идущая философия о роли и значимости ЗС и квадратичной пропорции в мироздании, где числа (в ЗС это единицы) играют роль элементарных монад времени – своеобразных единиц дления (по Бергсону–Козыреву).

Не исключено, что по мере развития науки мы выйдем на подтверждение гипотезы о том, ВРЕМЯ ГЕНЕРИРУЕТСЯ ПО "ЕДИНИЧНОМУ" ЗАКОНУ ЗС.

Краткий анализ и выводы.

Подводя краткие итоги, в целом можно высказать ряд соображений общего характера.

Работы *Н. Косинова*[7] в части квадратных уравнений больше схожи на парад чисел, имеющий не самое близкое отношение к расширению уже имеющихся знаний в этой области.

Уважаемая *В. Шпинадель* отличилась исключительно терминологией, но все ее названия – легкие женские фантазии, о которых в математике серьезно говорить не приходится, тем более в бесконечном множестве числовых объектов в виде корней – решений квадратного уравнения. Можно было бы еще согласиться, если бы ею была предложена, хоть какая-нибудь классификация решений, например, с выделением корней, содержащих радикал или корень из пяти, корреспондирующийся с

---

[7] Золотая пропорция, золотые константы и золотые теоремы / Золотые инварианты гармонических последовательностей / Гармонические последовательности [http://314159.ru/kosinov/kosinov21.htm/ 20.htm/ 29.htm].

тем же золотым сечением.

С *М. Газале* несколько сложнее. Хотя доказательство не представлено, все-таки скорее да, чем нет, что часто упоминаемую формулу он мог вывести. Но в общей структуре сегодня ей отводится весьма скромное место как частному случаю, поскольку для уравнения общего вида таким решением стало славянское развитие в работе [16], – см. формулу (1).

Наш соотечественник *С. Ясинский* также использовал корни квадратного уравнения в приложениях к электросвязи, теории фильтрации и др. [20], но странным образом без какой-либо конкретики получил [12] незаслуженный упрек в плагиате (?). Но с такой логикой можно обвинить в плагиате десятки миллионов людей в мире, которые берут готовое решение квадратного уравнения, и применяют как данное, без всяких ссылок, считая его общеизвестным со школьной скамьи! Подобное можно сказать и о квадрате гипотенузы, что используется ежедневно тысячами ученых без упоминания имени Пифагора, поскольку это настолько всем стало очевидно. Также как ничего кроме недоумений не вызывает реплика [8], по тону и интонациям которой невооруженным глазом просматривается очевидная надуманность и беспочвенность, вызывая устойчивую ассоциативную связь с футболом (в смысле перебрасывания мяча) и образом штатного пенальтиста (в смысле куда и как бить во имя команды и тренера).

За *А. Татаренко* бесспорно закрепляется имидж славянского (российско-украинского) ученого, который обозначил новый вектор и дал альтернативу в исследовании гармонии, по сути, выведя ее из гипнотического состояния за пределы узких рамок ЗС и поставив на новые рельсы квадратичных решений *Тт*-гармоник. В определенном смысле он стал одним из первых основателей (родоначальников) математических начал гармонии, "возмутителем спокойствия и катализатором" новой научной мысли в этой сфере, когда «Золотое сечение, как Число, при всей его уникальности, оказалось "одним из многих", хоть и первым в этом ряду» [11].

***Предложения*:**

1. Пропорции можно называть квадратичными, а "металлические пропорции" из лексикона науки о гармонии исключаются, а если и вспоминаются, то курьезным случаем. В зависимости от коэффициентов, конкретные алгебраические уравнения, а значит, их корни и возвратные последовательности исчисляются миллиардами. Как дизайнер-математик В. Шпинадель хорошо знает теорию Г. Кантора[9], из которой следует невозможность наделить собственными именами бесконечные корни квадратного уравнения, даже если мы будем использовать не только все металлы таблицы Менделеева, но и любые составные слова. Поэтому "покрытие бронзой или омеднение" пропорций – не более чем веселая шутка жизнерадостного человека. И относиться к этому нужно (по Лейбницу) также с долей иронии и легким юмором под общим углом зрения: «Математики шутят».

2. Слово «золотое» у этих пропорций также изымается, которое остается исключительно для частного случая $p = q = 1$, как и принято исторически по золотому сечению в чистом виде. При этом само ЗС, как уникальное и неповторимое число, не обобщается, ни с чем не уравнивается и ничем не подравнивается, – даже в названии.

3. Числа или корни квадратного уравнения таковыми и остаются без всяких эмоционально-окрашенных названий, поскольку для них не хватает суммарного лексикона всего человечества. В науке о гармонии эти числа можно именовать «основаниями пропорции», если приживется. При

---

[8] Розин Б.Н. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321082.htm.

[9] Одна из замечательных теорем Кантора утверждает, что количество всевозможных частей какого-либо множества всегда больше, чем количество элементов в самом этом множестве. В частности, количество всех частей натурального ряда больше счетного количества натуральных чисел, оно *несчетно*. А количество всех частей прямой линии больше континуального количества точек на ней.

желании вводятся обозначение типа λ_{pq}, тогда $\lambda_{11} = \Phi$. В целом для них допускается составить некоторые приемлемые и удобные в пользовании классификаторы, разделив бесконечное множество корней на совокупность видовых (типовых) подмножеств.

4. Применительно к квадратному уравнению ГФФЛ рассматривается рудиментарным образованием, поскольку для коэффициента $q > 1$ эти функции не работают, тем более что в математике у них уже давно есть собственное имя «огибающих кривых» (к функции Фибоначчи), а вся их гиперболизация – надуманная. Практически любое линейно-возвратное (разностное) уравнение стремится к своему корню с двух сторон, по комплексно-образующей функции с двумя огибающими.

Вместо размышлизмов. Лучше плохая теория, чем никакая. Но куда лучше никакой теории, чем неправильной. В этом смысле для пользы развития лучше не знать о существовании ЗС вообще и заниматься в науке о гармонии пропорцией общего вида, чем смотреть на мир только через золотые очки.

Это своего рода чистилище как проверка на прочность.

Мы знаем, насколько благотворным является освобождение от пут ЗС там, где оно "не светит", а лишь является мертвым грузом.

И все потом получается стройно, красиво, а значит, мы близки к магистральной дороге под названием "наука о гармонии" с ее математическими началами.

Именно началами, как преемственность Евклида.

И если Библия – книга № 1, Начала Евклида – № 2, то Начала Гармонии по праву станут книгой № 3, где имя А. Татаренко будет правомерно записано (просто обязано!) одним из первых, кто сбросил золотые оковы во имя развития науки и восстановления истинного статуса самой гармонической пропорции.

Почитаете "крик души Г. Малинецкого" [21], который для нас не просто математик, а широко эрудированный ученый – философ синергетики.

Такие вещи невозможно воспринимать спокойно или равнодушно!

Это и есть высочайшее искусство обобщения, в данном случае обобщения ситуации в стране на понятном всем языке, хотя глубоко уверены, что все сказанное он может свободно изложить чисто математически.

Это пример дает и нам путеводную нить, как в науке о гармонии освободиться от позолот-висюлек, надуманных математических наслоений, перекосов и прочей шелухи, когда «Развитие идет не по спирали, А вкривь и вкось, вразнос, наперерез» (В. Высоцкий).

Литература.

1. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый Мир. – 2007. – № 11–12.

2. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

3. *Корнеев А.А.* Как жить в ладу с арфой Времени? – М., 2006. – http://www.xsp.ru/author/outpub.php?id=375.

4. *Кондаков Н.И.* Логический словарь-справочник: 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 720 с.

5. *Исскуство мышления*. – http://logiki.ru/ponyatie-logiki/5-ogranichenieiobobschenieponyatiya.html.

6. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 464 с.

7. *Vera W. de Spinadel*. The metallic means family and forbidden symmetries the metallic means family and forbidden symmetries // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12603, 18.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320033.htm.

8. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

9. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Физматиздат, 1959. – 400 с.

10. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

11. *Никитин А.В.* О признании открытия А.А. Татаренко // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14786, 28.04.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161460.htm.

12. *Стахов А.П.* Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm.

13. *Татаренко А.А.* *Тт*-принцип – всемирный закон гармонии // Сб. докл. IV Междунар. науч. конф. «Этика и наука будущего. Феномен времени». – М., 2004. – http://roerich.rost.ru/tatarenko/doclad.doc.

14. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

15. *Василенко С.Л.* Стилистический ряд индуцированных отклонений. Часть третья // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15565, 29.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161550.htm.

16. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

17. *Арнольд В.И.* Цепные дроби. – М.:МЦНМО, 2000. – 40 с.

18. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби: Изд. 4-е, стереотип. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

19. *Василенко С.Л.* Геноматрица квадратичных рядов Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.15502, 02.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161536.htm.

20. *Ясинский С.Я.* Прикладная "золотая" математика и ее приложения в электросвязи. – Москва: Горячая линия – Телеком, 2004. – 240 с.

21. *Малинецкий Г.Г.* Инновация – последняя надежда России. Доклад о перспективах РФ // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15576, 02.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0009/001a/00091019.htm.

Приложение

Некоторые разложения решений квадратного уравнения $x^2 = px + q$

в бесконечные цепные дроби вида $\lambda = \dfrac{[b;(a)]}{c} = \dfrac{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}}}{c}$

$(p, q) = (1, 3)$: $\dfrac{[23;(36)]}{10}$, $\dfrac{[251;(393)]}{109}$;

$(p, q) = (1, 4)$: $\dfrac{[333;(536)]}{130}$;

$(p, q) = (1, 7)$: $\dfrac{[83;(140)]}{26}$;

$(p, q) = (1, 9)$: $\dfrac{[7;(12)]}{2}$;

$(p, q) = (1, 10)$: $\dfrac{[37;(64)]}{10}$;

$(p, q) = (2, 4)$: $\dfrac{[55;(76)]}{17}$, $\dfrac{[987;(1364)]}{305}$;

$(p, q) = (2, 9)$: $\dfrac{[154;(234)]}{37}$;

$(p, q) = (3, 2)$: $\dfrac{[7;(8)]}{2}$, $\dfrac{[463;(536)]}{130}$;

$(p, q) = (3, 5)$: $\dfrac{[109;(140)]}{26}$;

$(p, q) = (4, 13)$: $\dfrac{[398;(536)]}{65}$;

$(p, q) = (8, 13)$: $\dfrac{[122;(140)]}{13}$.