С.Л. Василенко

Гиперболические лабиринты на пути к гармонии

Платон любил Пифагора и зачитывался его трудами по золотой пропорции далеко за полночь при свете лучины...
Сарказм В. Белянина на исторические измышлизмы.

Чтобы разгадать мир, надо глядеть на него разными глазами. Восточная мудрость.

Введение. Гиперболичность чисел Фибоначчи ("Книга об абаке", 1228) де факто насчитывает столько же времени, сколько и сами числа, поскольку присуща им исторически, по определению и на генетическом уровне.

Учитывая, что свойства чисел на самом деле существовали задолго до того, как были познаны человеком или появились первые кролики, то их генеалогия имеет такой же возраст, как и окружающий нас мир, а возможно и больше.

Начиная с исходных чисел 0 и 1, в процессе аддитивной схемы роста (рекурсии) уже через три десятка итераций $i = 30$ они достигают значения, близкого к миллиону, еще через пару десятков – к 12 миллиардам, а далее просто фантастических значений:
$i = 100 \to 354224848179261915075 \approx 4 \cdot 10^{20}$;
$i = 200 \to 280571172992510140037611932413038677189525 \approx 3 \cdot 10^{41}$;
$i = 300 \to 222322446294204455297398934619099672066669390964997649909796 00 \approx 2 \cdot 10^{62}$ ...

Одновременно "золотой" ряд Фибоначчи (с его аттрактором в виде "золотого" сечения) является феноменальным проявлением числового взаимодействия.

Создается впечатление, что, рождаясь из простой рекурсии, элементы в его структуре прогрессируют и развиваются в буквальном смысле как живые с удовольствием и наслаждением, в то время как в иных структурах, основанных на других формулах, – числа больше похожи на веночную символику.

Такая незатейливая рекурсия, и одновременно такой фантастический мир чисел с удивительными взаимосвязями и соотношениями. Воистину простота создала, она же и спасет мир (наравне с красотой, как у Ф. Достоевского).

Де-юре гиперболичность начала выкристаллизовываться и оформляться с появлением формулы Бине (1786–1856), когда в явном виде стала воочию видна показательная зависимость чисел от их порядкового номера n в рекуррентном ряде.

В частности, операция целочисленного округления в этой формуле приводит к числам Фибоначчи по следующей степенной зависимости:

$$F_n \approx \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{где} \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Рано или поздно, но подобные гиперболические свойства должны были как-то интерпретироваться в формализованном виде с помощью натуральных логарифмов или адекватной им гиперболы с ее гиперболическими функциями (синуса, косинуса и др.).

И если применение логарифмов для чисел Фибоначчи еще как-то понятно и оправдано, то использование гиперболических функций не так очевидно и тривиально, что требует проведения определенного более углубленного анализа.

Открытым до сих пор остается и вопрос об их роли в реализации теоретических и практических разработок, более успешно пока решаемых и без их привлечения.

Либо до них еще не дошла очередь, либо они не несут новых знаний.

Развитие темы о гиперболичности.

В одной из работ [1] можно найти такие слова: «До сих пор не утихают споры по поводу "золотых" гиперболических функций, открытых украинским исследователем Олегом Боднаром, и гиперболических функций Фибоначчи и Люка, открытых украинскими математиками Алексеем Стаховым, Иваном Ткаченко и Борисом Розиным... Все остальные работы в этой области, как говорится, "от лукавого". Других оригинальных работ в этой области ... не существует».

Так ли это на самом деле? Да и странно как-то: споры есть, а работ нет, – видимо, речь идет о закрытых диспутах.

Отметим также весьма любопытную терминологию об "открытии функций".

Насколько известно функции не открываются (разве что в компьютере через *open*), поэтому будем считать это издержками изложения, по-видимому, навеянными замечательной монографией Д. Пойа [2], когда невольно может сложиться обманчивое впечатление о причислении к открытию решения любой мало-мальски нетривиальной задачи.

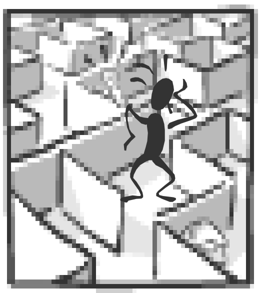
Да и понятие открытие имеет двойственное представление, которое также содержит "открытие" для себя чего-то уже давно известного.

Сами же функции (функционалы, операторы) формально вводятся, записываются или обозначаются, хотя им может предшествовать определенный этап установления (открытия, как получения ранее неизвестных знаний) новых физических или иных закономерностей.

Споров по поводу вышеуказанных функций также особых нет.

Полемика возникает обычно, когда не совсем понятно или выражается несогласие.

В данном вопросе в основном давно все ясно, но есть дальнейшее развитие и осмысление результатов, есть и разные взгляды на принципы построения гиперболических функций или некоторые комментарии, которые не всегда могут совпадать с точкой зрения других авторов.



Более важным здесь представляется уточнение фактической картины и правильная расстановка акцентов, которые будут способствовать спокойному и непредвзятому преодолению искусственных наслоений в виде гиперболизированных лабиринтов на пути к "гармонии в вопросах о гармонии".

А они есть, и весьма запутанные...

Представление формулы Бине. В широкодоступной русскоязычной публикации прошлых лет у Н. Воробьева [3, с. 25] (первое издание датируется 1961 г.) для вычисления чисел Фибоначчи u_n в явной форме представлена процедура вывода формулы Бине

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

где α, β – корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, для которых согласно теореме Виета выполняется тождество $\alpha\beta = -1$ [3, с. 24], то есть $\beta = -\alpha^{-1}$.

В обозначениях работы [3] отсюда непосредственно следует

$$u_n = \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - (-1)^n \alpha^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Такие же формы представления чисел Фибоначчи мы позже находим и в ряде других работ, например [4–6].

Поэтому «явление Бине народу», снизошедшее свыше в ново-формульном обличие, на поверку оказывается скрупулезным прочтением двух страниц монографии Н. Воробьева, когда всего-то и осталось на месте "дважды два" записать "четыре".

Дискретность-непрерывность. Числа Фибоначчи являются частным и наиболее элементарным эпизодом теории линейных возвратных уравнений (насчитывающей уже более 60 лет), где в общем случае аргумент x является непрерывно изменяющимся.

Обычно считают «x меняющимся по дискретной последовательности – арифметической прогрессии» и одновременно допускают, что «равностоящие значения имеют разность единица, так как случай разности, равной произвольному значению h, может быть приведен к этому подстановкой $x = h\,t$» [7, с. 309].

То есть переменная пробегает дискретную последовательность значений $x = x_0 + n$, где n – числа натурального ряда, а x_0 – действительное число.

В качестве примера однородного конечно-разностного линейного уравнения в работе [7, с. 340–341] представлен непрерывный аналог последовательности Фибоначчи

$$F(x) = C_1\alpha^x - C_2\beta^x,$$

где постоянные C_1, C_2, в частности, определяются из начальных условий, когда $F(x)$ означает число Фибоначчи дискретного номера x.

Одновременно отмечается, что числа Фибоначчи растут практически как члены геометрической прогрессии (со знаменателем α), поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \beta^x \to 0$.

Таким образом, гиперболичность формы представления Бине следует непосредственно из известной работы Н. Воробьева [3], а непрерывный аналог чисел Фибоначчи – из общей теории возвратных уравнений [7], справедливой для любых аддитивно-возвратных последовательностей, включая Фибоначчи, что приводит к непрерывной форме в виде функции Фибоначчи

$$F(x) = \frac{\Phi^x - (-1)^x \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}, \tag{1}$$

где $\Phi = \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – более распространенное и привычное на сегодня обозначение числа "золотого" сечения, как отношения большей части целого к его меньшей части.

Такой конечно-разностный подход в теории возвратных уравнений полностью отвечает принципу непрерывности во всяком процессе природы (Лейбниц, 1684), то есть положению «Nature non fasit saltun» [8, с. 122] или «Природа не делает скачков».

Таким образом, сами по себе числа Фибоначчи уже гиперболичны, поскольку содержат степенную функцию Φ^n числа, большего единицы. А их аналитический вид (независимо от формы записи) позволяет сделать замену дискретной переменной n непрерывным аргументом x, то есть $n \to x$.

Поскольку в общем случае $(-1)^x = \cos(\pi x) + i \sin \sin(\pi x)$ – комплексное число с мнимой единицей i, то и $F(x)$ – комплексная функция.

Графически ее удобно изобразить в фазовом пространстве либо в виде реальной (вещественной) части $\operatorname{Re} F(x)$.

Огибающие линии функции Фибоначчи.

Как видно из графика (рис. 1) непрерывная функция Фибоначчи $\operatorname{Re} F(x)$ характеризует колебательный режим с переменной амплитудой, которая в свою очередь описывается (моделируется) верхней и нижней огибающими непрерывными линиями.

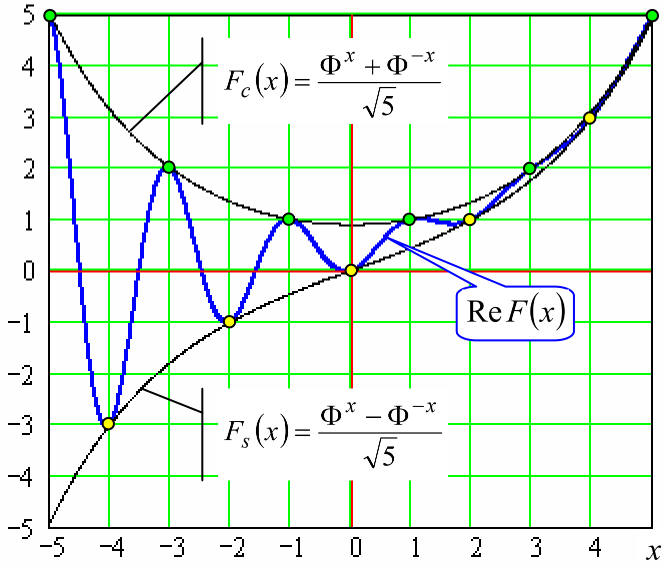


Рис. 1. Непрерывная функция Фибоначчи с двумя огибающими

Огибающая кривая или линия (*envelope*) касается искомой (исходной) функции, не имея с ней общих дуг или областей. При этом вся кривая Фибоначчи находится по одну сторону от верхней (по максимумам) и нижней (по минимумам) огибающей.

В математике к огибающим кривым обычно прибегают в тех случаях, когда хотят проследить общие тенденции изменения каких-либо характеристик.

Например, известна огибающая кривая звукового сигнала, тонально-модулированного высокочастотного колебания, огибающая волновой или корреляционной функции сигнала и др.

Правильно построенная огибающая функция, в частности, открывает широкие возможности по идентификации шума, который сопровождает изучаемый процесс или природное явление.

Огибающие эволюционирующей функции Фибоначчи сами являются аналитическими функциями, и строятся элементарной заменой $(-1)^x$ на 1 для максимумов и -1 для минимумов.

Можно также построить функцию средних значений двух огибающих, положив $(-1)^x = 0$.

Каждая из огибающих линий (рис. 1) подпадает под ее классическое определение [9, с. 520]: огибающей однопараметрического семейства кривых называется кривая, касающаяся в каждой своей точке одной из кривых семейства. Иногда, к огибающей также относят точки, которые принадлежат одновременно всем кривым семейства.

Таким семейством является счетный набор функций, использующий синусоидальные функции переменной частоты (рис. 2).

При этом все кривые определяются на евклидовой плоскости.

Отметим, что огибающая – четкое и сложившееся математическое понятие, которое не требует других функционально-отличительных признаков, за исключением возможных дополнений, например, "верхняя огибающая функции Фибоначчи".

Секреты и кухня творчества. Изложенные знания составляли исходные рубежи до введения вышеупомянутыми исследователями согласно [1] модифицированных гиперболических функций. Каждый ученый подходил к осмыслению существующих знаний с разной стороны, но в любом случае они уже были известны еще в начале 60-х годов.

Обратим внимание на важный момент о первичности функции $F(x)$, когда каждая из огибающих линий к ней, которая из нее же и вытекает, является вторичным или дополнительным инструментарием.

То есть функция $F(x)$ – самодостаточна и нисколько не зависит от наличия или существования ее огибающих линий, которые никак не влияют на исходную (порождающую) функцию и являются всего лишь ее следствием.

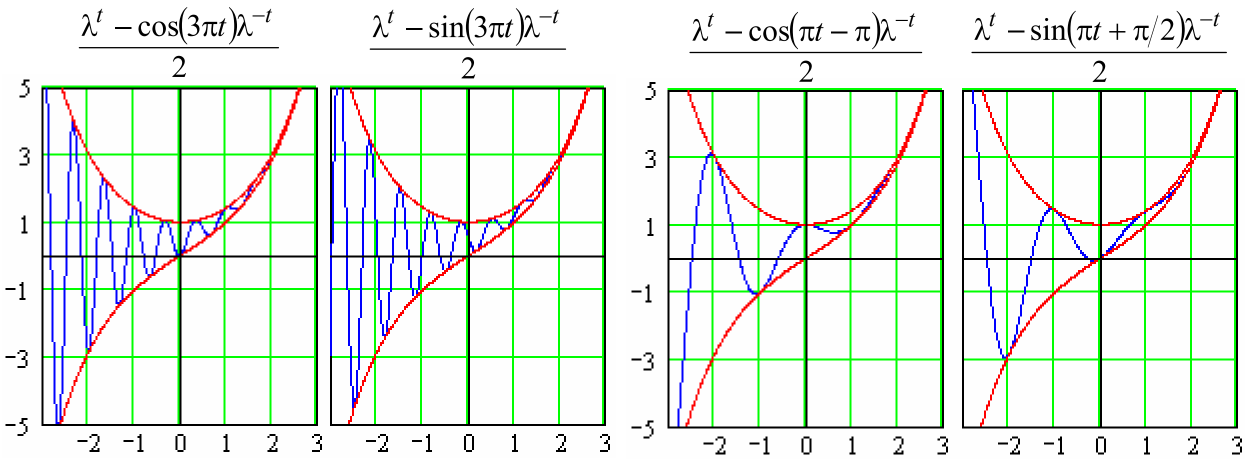


Рис. 2. Огибающие линии к кривым однопараметрического семейства функций, основанных на модификациях непрерывной функции Фибоначчи

Есть или нет, проведены или не проведены две огибающие линии $F_c(x), F_s(x)$, это никоим образом не отражается на поведении базовой функции $F(x)$, а также на ее многочисленных интересных и просто красивых свойствах-закономерностях.

Не трудно заметить сходства в записи и не провести параллель между функцией $F(x)$ и классическими гиперболическими функциями синуса–косинуса [10], что рано или поздно должно было как-то себя проявить. Профессиональные математики данному вопросу внимания практически не уделяли, поскольку он для них был в определенной мере уже давно пройденным этапом. И лишь небольшой круг энтузиастов разных специальностей продолжал работать над вопросами по теме "золотого" сечения

Поэтому, как ни удивительно на первый взгляд, но это свободное место (белое пятно) первым искусно заполнил архитектор О. Боднар. Изучая ботаническое явление филлотаксиса, в процессе исследований он ввел и математически описал гиперболические функции, основанные на "золотом" сечении [11–12].

Названные им "золотые" гиперболические функции (ЗГФ) косинуса и синуса имеют вид

$$\mathrm{ch}_\Phi x = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}_\Phi x = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{2}. \tag{2}$$

Особо подчеркнем, что такое введение новых функций (понятий) в целом отвечает самым требовательным положениям математической логики и геометрическому смыслу изоморфных переходов от окружности к гиперболе, о чем несколько подробно будет сказано ниже.

Сама по себе тема замены числа Эйлера e на другое число не нова и вполне допустима по формуле (2), но математики к ней не прибегают, поскольку теряется все изящество и гармоничность переходов к логарифмам и единичной окружности. И только число e позволяет выполнить подобные операции во всей математической строгости и одновременной красоте, что приводило в восторг не одно поколение математиков.

На возможность использования в гиперболических функциях вместо числа e других величин указывает, в частности, Ф. Клейн [8, с. 238] с проективной точки зрения, – через пучок лучей с вершиной в одной из точек гиперболы: «Рассматривая в случае круга или гиперболы параметр какого-нибудь такого пучка как функцию площади, мы придем к другой основной функции, тоже оставаясь в действительной области».

На это же обращает внимание С. Ясинский [13; 14, с. 108–114].

Но уже через год, в том же журнале и в таком же русле вводятся так называемые гиперболические функции Фибоначчи и Люка (ГФФЛ) [15], которые через 10 лет модифицируются на более удобоваримый симметричный вид [16]:

$$F_c(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad F_s(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad (F(0), F(1)) = (0, 1). \tag{3}$$

$$L_c(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}, \quad L_s(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}; \quad (F(0), F(1)) = (2, 1). \tag{4}$$

Внешне ГФФЛ (3)–(4) являются производными от (1), мало чем отличаются от (2), да и сам факт их быстрого введения в одном журнале с О. Боднаром фактически свидетельствует о простом трансформировании его идеи.

Рассматривая кухню творчества, о которой мало кто честно рассказывает, можно предположить, что привычный и выверенный многими математиками вид гиперболической функции был уже "занят" соотношениями (2), поэтому и возникли все эти трансформационные надстройки в виде ГФФЛ, которые по целому набору свойств диссонируют с признанной и уже ставшей классической математической теорией.

Плохо это или не очень? Жизнь уже все расставляет на свои места.

Но в любом случае математические диссонансы являются существенными, а по сути дела искусственно сформированными тормозами–ограничителями для применения функций (3)–(4), тем более, когда у нас уже есть математически строго корректные объекты (1)–(2), из которых элементарно образуются соотношения (3)–(4) и любые другие с новой парой произвольных начальных условий $F(0), F(1)$.

Также ссылаясь на внешнее сходство $F_c(x), F_s(x)$ с обычными гиперболическими функциями, авторы [15, 16] механически называют их тоже гиперболическими с приставками Фибоначчи и Люка. К этому присовокупляется эффектное название в виде гиперболической тригонометрии, – собственно и все. То есть к уже имеющимся знаниям (рис. 1) добавились и впрямь ... *новые названия* (!), причем как увидим ниже, имеющие самое отдаленное отношение к теории гиперболичности в ее исконном представлении.

Другими словами, вся новизна сводится к замене известного математического понятия "огибающих кривых" на придуманное наименование ГФФЛ.

Анализ двух подходов.

У *О. Боднара* все более-менее понятно. Функции он свои ввел гораздо раньше.

Их форма отвечает геометрическим представлениям равнобочной гиперболы и правилам формирования гиперболичных функций. Наконец, он их использует затем для описания природного процесса, – с коэффициентами или без таковых, значения не имеет. Также как и в алгебраических уравнениях, когда для процесса решения более важным является их порядок (степень), а не значения коэффициентов, но конечный численный результат уже существенно зависит от коэффициентов.

Сам процесс исследований и поиск решений отличается в корне.

Во-первых, он первый формализовал априори существующую гиперболичность чисел Фибоначчи на языке введенных им гиперболических функций.

Во-вторых, математика для не него не самоцель, а средство решения задачи, причем, весьма конкретной – описания геометрии филлотаксиса. Биологические объекты постоянно развиваются (растут), поэтому для лучшего представления ему понадобился переход от дискретных чисел Фибоначчи к их непрерывному аналогу.

Но сам подход отвечает общей методологии, когда математические объекты обычно создаются не под конкретное природное явление, тот же филлотаксис, а в виде отвлеченных абстрагированных структур и отображений, которые уже потом могут использоваться для формализованного описания тех или иных природных процессов.

В-третьих, "золотые" гиперболические функции им вводятся очень строго и в соответствии с традиционным подходом, который в течение не одного столетия многократно и успешно апробирован разными ученными, к примеру, с использованием нормировочной двойки в знаменателе (2).

В-четвертых, функции логически правильные и удовлетворяют практически всем тождествам классической теории гиперболических функций [10].

В целом этот подход основан на строгом геометрическом изоморфизме между единичным кругом и единичной равнобочной гиперболой, а также логической связи (слиянии) числа и пространства, и вообще органическом взаимоотношении между отдельными областями математики. В частности, речь идет об интегрировании (квадратуры) гиперболы, которое дает определение логарифма [8, с. 116] $\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$ или при переходе к числу золотого сечения $\frac{1}{\ln \Phi}\int_1^x \frac{dx}{x} = \lg_\Phi x$.

Один из самых главных моментов связан также с наличием двойки в знаменателе (2). Именно это позволяет получить удивительные гиперболические свойства и провести строгое соответствие между единичным кругом $x^2 + y^2 = 1$ и единичной гиперболой $x^2 - y^2 = 1$.

Этот вопрос подробно освещен в работе [8, с. 233–237], где в частности показано, как при повороте осей координат на 45° избавляются от появляющейся в знаменателе иррациональности $\sqrt{2}$ с ее преобразованием в двойку, после чего выражение становится действительно гиперболической функцией. В этом контексте формулы (3)–(4) автоматически выпадают из обоймы гиперболических функций по определению, вне зависимости от фасада или заставки в виде ГФФЛ.

Применительно к числу Ф на необходимость такой параметризации указывает и С. Ясинский [13, с. 110].

В результате этого с ГФФЛ все гораздо сложней, непонятней и противоречивей.

Введены они без привязки к решению конкретных задач на формально-математическом уровне, следовательно, должны отвечать минимально-необходимому набору основных математических требований.

Но здесь, создается впечатление, что все как раз выстроено вопреки логике и здравому смыслу, когда приходится констатировать, что за многие годы изучения различной научной литературы нам не приходилось одновременно видеть такое количество несообразностей в одном математическом объекте, каковым являются ГФФЛ.

Вся странность гиперболичности в этих функциях воочию всплывает, когда начинаешь с ними производить обычные тождественные тригонометрические преобразования.

Ни одна из привычных формул для ГФФЛ не работает!

Буквально все классические тождества меняются. Причем отдельно под числа Фибоначчи, затем под числа Люка и так далее под каждую новую пару начальных условий.

То есть для каждой пары затравочных чисел формируется свой набор и геометрия тригонометрических тождеств. Но это уже не математика, а фантасмагория.

В работе [1] утверждается, что ГФФЛ якобы являются расширением чисел Фибоначчи и Люка, а также обобщением формулы Бине, – на непрерывную область

Конечно, это не так. Сама по себе формула Бине уже является непрерывной, а данные числа уже давно расширены на непрерывную область без всяких ГФФЛ.

В этом не трудно убедиться при работе с формулой Бине в области вещественных чисел. Что есть ГФФЛ, что их нет, по этим формулам легко выполняются расчеты в действительных и даже мнимых числах. Числа Фибоначчи и Люка тоже спокойно расширяются на непрерывную область сами по себе без всяких ГФФЛ.

Далее в том же ключе говорится [1], что теория чисел Фибоначчи заменяется теорией ГФФЛ, а числа Фибоначчи и Люка являются частными случаями более сложных математических объектов – ГФФЛ – расширений чисел Фибоначчи на непрерывную область.

Здесь явное недоразумение. Непрерывным аналогом остается сама аддитивная функция Фибоначчи. Задайте произвольные начальные условия, и получите непрерывный числовой аналог чисел Фибоначчи без всякой гиперболичности, которая здесь звучит как заклинание. Наоборот одна единственная функция Фибоначчи при разных начальных условиях задает (описывает) невообразимое множество ГФФЛ.

Непрерывным обобщением чисел Фибоначчи непосредственно является непрерывная форма записи формулы Бине. В промежуточных нецелочисленных точках ГФФЛ лишены четко выраженного физического смысла, поскольку непосредственно не связаны с самой функцией Фибоначчи в эти моменты переменной x.

Например, обобщение формулы Кассини логичнее выполнять не через гиперболические синусы или косинусы, а непосредственно через саму непрерывную функцию Фибоначчи для любого значения x (действительного, мнимого, ирационального, трансцендентного)

$$F(x)^2 - F(x-1)F(x+1) = (-1)^{x+1}.$$

Соотнесение функции Фибоначчи и ее огибающих кривых.

ГФФЛ в дискретные моменты совпадают с функцией Фибоначчи, как впрочем, и положено огибающим кривым независимо от того, что их переиначили в ГФФЛ.

Но что они представляют собой в остальные моменты времени?

Какова, например физическая интерпретация $F_x(1{,}84)$ или $F_c(\pi)$ на языке вводимых формул?

Весь смысл как раз и состоит в том, что вся необходимая и достаточная информация сосредоточена в самой непрерывной функции $F(x)$.

Разница состоит лишь в том, что для дискретной функции F_n мы задает два начальных условия (F_0, F_1), для непрерывной функции $F(x)$ – две точки $F(0), F(1)$, через которые она должна пройти.

Огибающие линии мы можем как-то и назвать. В простейшем случае их можно даже наделить эпитетами ГФФЛ (почему бы и нет, если очень хочется). Собственно и все.

Есть или нет эти функции, даны или не даны им какие-либо названия, – никакой роли не играет, если под рукой находится бритва Оккама: то, что можно объяснить посредством меньшего, не следует выражать посредством большего.

Не они насыщают информативностью функцию $F(x)$ и тем более придают ей непрерывные свойства. Наоборот непрерывная функция $F(x)$, впитав в себя все свойства дискретных чисел Фибоначчи, расширяет их свойства на непрерывную область.

Огибающие линии в этом принимают самое отдаленное участие второго плана.

Их назначение больше корреспондируется со зрительным образованием контуров или коридора изменчивости непрерывно-колеблющейся функции $F(x)$, с ее более рельефным отображением.

Первичной есть функция $F(x)$, все остальное является вторичным или третичным.

Примечательно, что значениями могут выступать любые числа: вещественные и мнимые, рациональные и иррациональные, трансцендентные и др., но это уже иная тема.

Характерно, что на языке вводимых формул (3)–(4) весьма затруднительно ответить на вопрос о физическом смысле или трактовке тех же значений $F_x(1{,}84)$ или $F_c(\pi)$.

На математическом языке огибающих линий данный вопрос разрешается элементарно:

с какой бы частотой f или сдвигом по фазе φ мы не "запустим" тригонометрическую функцию синуса $\frac{\lambda^t \pm \sin(\pm ft \pm \varphi)\lambda^{-t}}{2}$ или косинуса $\frac{\lambda^t \pm \cos(\pm ft \pm \varphi)\lambda^{-t}}{2}$, она обязательно (как извивающееся пресмыкающееся) поползет по коридору между двух огибающих $\frac{\lambda^t \pm \lambda^{-t}}{2}$ непосредственно следующих из непрерывной формы типа (2) и ею обусловленных,

где λ – в общем случае произвольное положительное число.

В этом то и состоит глубокий смысл, что функция синуса или косинуса (2) универсальна независимо от начальных условий.

А уже ее конкретное применение отражает эти начальные условия.

В ГФФЛ все наоборот: под каждую пару затравочных чисел – свои гиперболические функции и свои отдельные геометрии, на которые не хватает никаких бритв Оккама!

Ностальгия о прошлом. Нам могут возразить, что ГФФЛ – полновесная математика, которая опубликована в украинском журнале. Более чем это корректно по этическим соображениям, в виде подтверждения обязательно приведут имя академика Ю. Митропольского (1917–2008) – видного теоретика нелинейных колебаний.

На это не стоит тратить зря силы, поскольку в начале перестроечных 90-х и не то печаталось, как говорится – всему советскому назло. А авторитет любого ученого, даже с мировым именем, хотя и влияет на общий прогресс, но в самой математике и вообще любой науке к счастью не является необходимым и достаточным условиями доказательства.

Тем более ГФФЛ, как функциональные зависимости, "списанные" с огибающих кривых и ЗГФ, формально имеют место.

Поэтому следует исходить не из того что было, а из того что уже есть.

Приведем по рассматриваемой теме высказывание самого академика Ю. Митропольского [17, с. 14]: «Применение математики к другим наукам имеет смысл только в единении с глубокой теорией конкретного явления. Об этом важно помнить, чтобы *не сбиваться на простую игру в формулу, за которой не стоит никакого реального содержания*» (курсив мой – *С.Л.*). Сравнение соотношений (2)–(4) – тому подтверждение.

И законы природы с теорией Боднара сюда тоже не нужно присовокуплять, поскольку там как раз все в порядке. Доказывать нужно не столько с помощью чьей-то геометрии, сколько с помощью собственной логики, как и положено, через сопоставление единичного круга и единичной равнобочной гиперболы, как это делали Н. Лобачевский, Г. Минковский, В. Шерватов [10] и другие ученые.

В целом же явление филлотаксиса объясняется на языке Фибоначчи без всяких гиперболических вывертов: хоть золотых, хоть не очень. Для этого дискретное начало следует рассматривать как частный случай непрерывного, которое, в свою очередь, следует из теории возвратных уравнений [7] и принципа непрерывности Лейбница.

Тем не менее, сами ЗГФ (1) имеют полное право на существование, поскольку не противоречат логике геометрии, тригонометрии и сопоставления единичных геометрических линий: окружности и гиперболы.

А если функции ГФФЛ введены формально, то и доказательную базу тоже следует строить на формализованном чисто математическом уровне, а уже потом вспоминать и матушку-природу в прикладных исследованиях, находя какую-то зацепку для опоры в геометрических построениях О. Боднара.

Но с математикой здесь как раз и разлад, хотя сами функции в целом записаны непротиворечиво, что естественным образом вытекает из понятия "огибающих кривых".

Начальные условия. Задаем простой вопрос: какая новая информация появляется после того, как эти функции названы гиперболическими? Ответ простой – никакая (см. рис. 1).

Хоть есть название ГФФЛ, хоть его нет, непрерывная функция Фибоначчи заключена между двух ее огибающих линий, которые ей же и продуцируются.

Далее следует "куча-мала функций".

Другое более лояльное название этому бесконечному набору трудно придумать: пара гиперболических функций (синуса-косинуса) Фибоначчи, такая же пара функций Люка, новая пара уже симметричных гиперболических функций (синуса-косинуса) Фибоначчи, такая же новая пара функций Люка. И так без конца по нескольку раз для каждой новой пары начальных условий (затравочных чисел), доходя до полного абсурда.

При этом с изменением начальных условий происходит полная трансформация гиперболических функций синуса и косинуса (рис. 3) с нарушением их симметрии и основных базовых свойств (четности–нечетности, точек пересечения осей координат и др.).

Довольно странная вырисовывается математика, которая простые вещи усложняет до немыслимой неузнаваемости, сводя на нет всю гармоничную живость самих последовательностей Фибоначчи.

И это все из-за отсутствия четкой базы самих функций типа (2), на которую можно было бы "цеплять" дополнительные параметры.

Так классический синус или косинус мы можем разнообразить самыми различными способами: коэффициентом (амплитудой), сдвигом (фазой) или сжатием (частотой).

Нечто подобное в ГФФЛ трудно проводимо, поскольку основная база не выписана, и является заложником начальных условий: каждой паре затравочных чисел соотносится свой формульный синус и косинус, и так до бесконечности.

Развитие идей гиперболичности и огибающих.

Сам по себе вывод формулы Бине сравнительно несложный, что видно, в частности, из выполненного нами ее обобщения [18] для квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$.

Об этом же свидетельствует монография [19, с. 62], в которой представлено обобщение формулы Бине на частный случай $(q = 1)$ квадратного уравнения $x^2 = px + 1$ в качестве упражнения для читателей, на основании которого в работе [20] формально, но вполне корректно расширяется ГФФЛ на случай $p > 1$:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{F_c}(x)\\ \mathrm{F_s}(x)\end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^x \pm \lambda^{-x}}{\sqrt{p^2+4}}\ , \qquad (5)$$

где $\lambda = \dfrac{p + \sqrt{p^2+4}}{2}$ – положительный корень уравнения $x^2 = px + 1$.

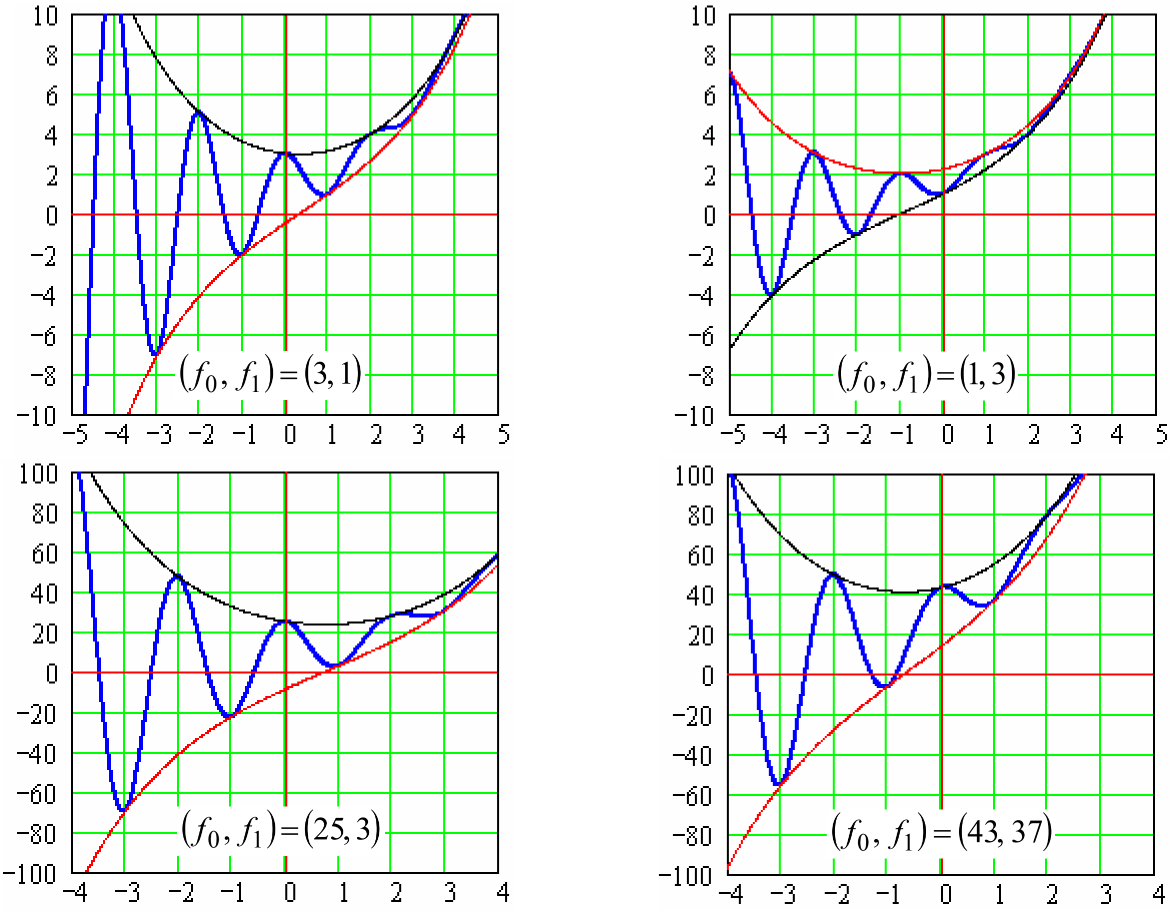


Рис. 3. Нарушение симметрии и базовых свойств гиперболических функций Фибоначчи в зависимости от изменения начальных условий (затравочных чисел)

Но это не проявление теории гиперболичности и гиперболических функций, – чего стоит только знаменатель в формуле (5)! Поэтому не случайно в работе [20] мы не находим ни одного геометрического построения, которые генетически свойственны этой теории, как у Н. Лобачевского или В. Шерватова [10], и представление ГФФЛ (5) вполне может быть отнесено к «ксероксному» методу.

Уже для случая $q > 1$ подобное обобщение "выдыхается" и попросту перестает работать.

И это не издержки повышения уровня сложности задачи, а следствие самого подхода к формальной искусственной гиперболизации по внешним признакам, что подпадает под бритву Оккама: не умножай сущностей без веских на то причин.

Оказывается, все прекрасно работает и при $q > 1$, если бритвой Оккама убрать лишние наслоения в виде ГФФЛ, а работать с ними как с обычными кривыми, физически огибающими непрерывную обобщенную функцию Фибоначчи для квадратного уравнения.

Это наглядно демонстрируется ниже, убедительно отвечая на вопрос, нужны ли ГФФЛ, и что они дают?

Хотя, как говорится, дело вкуса.

Квадратное уравнение $q > 1$. Нужна ли нам вообще эта подстройка под традиционную форму гиперболических функций, и не сужаем ли мы тем самым игровое поле обобщений Фибоначчи в широком смысле как аддитивно-рекуррентных структур?

В том, что действительно сужаем, мы легко убеждаемся, когда приходим к рассмотрению квадратного уравнения $x^2 = px + q$ с коэффициентом $q > 1$.

С этим мы первый раз столкнулись в работах [21–22], когда, находясь в плену гиперболических функций, так и не смогли выйти на приемлемое решение при $q > 1$.

Как убедились выше, ЗГФ и ГФФЛ, в общем-то, являются искусственными малоинформативными образованиями. Та же задача формализованного описания геометрии филлотаксиса успешно решается и без них.

Поэтому либо следует сказать, что геометрия обобщений Фибоначчи заканчивается на квадратном уравнении $x^2 = px + 1$, и все остальные аддитивные структуры (трибоначчи, *n*-боначчи, числа на основе пирамиды Паскаля и т.п.) уже никакого отношения к теории Фибоначчи не имеют. Либо следует вообще уходить от идей ГФФЛ.

Здесь возможны два варианта.

Первый вариант исходит из положения, что двух варьируемых коэффициентов p, q для данного множества рядов слишком много, и содержит искусственные преобразования переменных, что сужает область его распространения на другие алгебраические уравнения.

Второй вариант – наиболее продуктивный в смысле развития не только подхода в рамках квадратного уравнения общего вида, но и других форм, далеко выходящих за его пределы.

В его основе лежит наше обобщение формулы Бине [18] для непрерывного отображения:

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\lambda^x - (-q)^x \lambda^{-x}}{p'} = p\mathrm{F}(x-1) + q\mathrm{F}(x-2),$$

где $\lambda = \dfrac{p + p'}{2}$ – положительный корень квадратного уравнения, $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$

Вне сомнения, что дальнейшая формальная гиперболизация по формам (2)–(5) здесь уже не проходит, хотя следы ее проявления еще остаются.

Возникает парадокс: де-факто гиперболическое свойства налицо, но описать с помощью гиперболических функций мы его не можем.

При разрешении этого парадокса становится совершенно очевидным, что ГФФЛ подпадают под бритву Оккама как лишние сущности, а любые (из многих миллиардов) непрерывно огибающие функции (окаймление, бордюры) спокойно воссоздаются по универсальной паре формул:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{C}(x) \\ \mathrm{S}(x) \end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^x \pm q^x \lambda^{-x}}{p'},$$

с их последующим обобщением на произвольные начальные условия (f_0, f_1):

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{C}'(x) \\ \mathrm{S}'(x) \end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} f_1\mathrm{C}(x) + f_0\mathrm{S}(x-1), \\ f_1\mathrm{S}(x) + f_0\mathrm{C}(x-1). \end{matrix}\right.$$

Последняя запись означает, что в зависимости от конфигурации начальных условий формулы могут выстраиваться как по горизонтали, так и в перекрестном отображении.

То есть в одних случаях $\mathrm{S}'(x) = f_1\mathrm{S}(x) + f_0\mathrm{C}(x-1)$, в других $\mathrm{S}'(x) = f_1\mathrm{C}(x) + f_0\mathrm{S}(x-1)$.

Но в любом случае такая дуальная форма всегда дает пару огибающих линий.

Это еще один аргумент не в пользу ГФФЛ, когда в зависимости от начальных условий приходится даже изменять формулы для синуса и косинуса.

Одновременно еще раз подтверждается единство логики и правильность методологических подходов к построению гиперболических функций О. Боднаром и нашего обобщения [21] на любое действительное решение квадратного уравнения без строгой привязки к начальным условиям.

А это весьма позитивный и обнадеживающий фактор!

Итак, снятие лишнего бремени ГФФЛ позволяет спокойно решать задачу описания гиперболичности не с помощью искусственно образованных функций с новыми названиями, а обычным давно испытанным математическим приемом с привлечением понятия «огибающих плоских кривых на евклидовой плоскости» [9, с. 518–520] – составной части дифференциальной геометрии.

Как мы увидели, терминологические наслоения в процессе теоретического развития гиперболичности заводят нас в тупик.

Элементарное квадратное уравнение с его непрерывной интерпретацией в гиперболических переменных нам становится не под силу.

Гиперболичность, как физико-математическое представление, де-факто присутствует, только ее не нужно рядить в белые одежды, а работать с ней привычным и давно испытанным в математике методом путем представления функции с ее «коридором изменчивости» в виде огибающих линий (рис. 4).

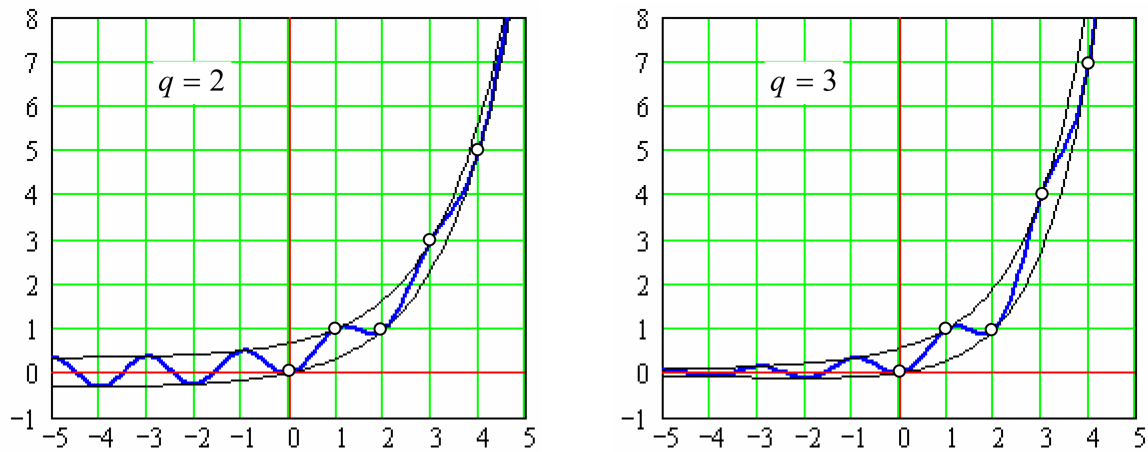


Рис. 4. Построение огибающих линий
к обобщенной функции Фибоначчи квадратичного уравнения

Все ЗГФ и ГФФЛ уходят на задний план и просто отсекаются как ненужные сущности.

Форма записи обобщенной функции Фибоначчи как была внешней похожестью на гиперболические функции, так ею и осталась без особой смысловой нагрузки.

Более того, именно эта похожесть сыграла злую шутку при простом обобщении задачи уже на уровне уравнения второго порядка, по сути, заведя ход исследований в гиперболический тупик.

И только освобождение от груза ГФФЛ (!) позволяет без особых усилий выйти на решение задачи.

Таким образом, как показывает наш анализ, новоявленные гиперболические функции типа ГФФЛ, призванные к совершенствованию непрерывного описания обобщенных последовательностей Фибоначчи, на самом деле уже для простого квадратного уравнения общего вида приводит к неразрешимости задачи в этих функциях.

В то же время классические математические приемы по представлению семейства непрерывных функций в совокупности с их огибающими позволяет элементарно и без каких-либо затруднений отобразить развитие процесса в общем виде, включая и его частный случай для чисел Фибоначчи с произвольными начальными условиями, который всегда приводит к "золотому" сечению.

Что дают ГФФЛ.

Нужны ли вообще новоявленные модификации гиперболические функции, если все задачи решаются и без них? Или имеют ли ГФФЛ право на существование?

В принципе, да. Не запрещать же их законом. Хотя бы исходя из второго эпиграфа, или в качестве примера ортодоксальной математической логики.

К тому же, являясь в частных случаях огибающими, они представляют собой разновидность записи последовательностей Фибоначчи. Особо вредного здесь ничего нет.

Споры о преимуществах тех или иных функций в целом являются беспредметными, если рассматривать эти функции абстрактно, без применения к конкретным задачам.

Но что ж это за задачи в общем плане?

Достаточно изменить начальные условия, ГФФЛ также уходят на второй план, превращаясь в занимательные небылицы.

Достаточно проверить любое тригонометрическое тождество на ГФФЛ, и сразу всплывает некорректность их названия, когда кроме гиперболического налета, за ними ничего не стоит. А все тождества для ГФФЛ в части их подобия числам Фибоначчи не несут новой информации, поскольку один к одному повторяют исходные формулы только в других обозначениях.

Достаточно положить $q > 1$, и красивая сказка о значимости гиперболических функций заканчивается.

Поэтому ГФФЛ не нужно приукрашивать больше, чем они стоят на самом деле, однако, невооруженным глазом видно, что их значимость гипертрофически гиперболизирована, как декорации на фоне игры знаменитых актеров в хорошем спектакле.

Но остается общая теория непрерывных функций и их огибающих.

Вместо заключения. Попытаемся как-то обыграть сакраментальный вопрос работы, с которой мы начали свое исследование [1]: какой же тип "золотых" гиперболических функций использует природа в ботаническом явлении филлотаксиса?

Некорректность самой постановки данного вопроса была и остается очевидной с самого начала, поэтому и ответить на него принципиально невозможно.

Никакие подобные функции природа не использует.

Она даже не знает об их существовании. Это человек применяет разные маневры и ухищрения, в том числе и математические, чтобы как-то охарактеризовать интересующие его явления и процессы в окружающем мире.

Но попробуем подойти к данному вопросу не в буквальном, а переносном смысле, когда тональность проблематики становится более или менее узнаваемой. Видимо, речь идет о математических функциях, с помощью которых моделируются биологические процессы.

Касаясь конкретно темы филлотаксиса, можно сказать, что эта проблематика пока далека от своего разрешения, и находится еще в стадии продолжающихся поисков.

Кстати первым, кто заметил связь строения растений и их роста с "золотым" сечением, был Иоганн Кеплер, который в работе «О шестиугольных снежинках» упоминает и явление филлотаксиса (от греч. *phyllon* лист + *taxis* порядок), как особого решетчатого расположения листьев, лепестков или семян у многих видов растений[1] [23, с. 15].

---

[1] Так, расположение листьев на стеблях покрытосеменных растений характеризуется дробью. В числителе указывается количество листьев, которые нужно пройти, чтобы добраться до более молодого листа, находящегося на той же ортостихе, а в знаменателе – число оборотов вокруг стебля, которое при этом требуется совершить. Для большинства растений филлотаксисные дроби выражаются отношением чисел Фибоначчи, взятых через одно: F_{n+2}/F_n.

Его систематическое изучение началось после работ братьей Луи и Огюст Браве (1837) – основателей кристаллографии. Ф.Людвиг установил закон, согласно которому число органов у растений изменяется скачками в соответствии с числами Фибоначчи.

Та же геометрия Боднара [10, 11] – всего лишь одна из многих гипотез. Хотя он уже смог показать, что количество парастих (смежных рядов в решетках) выражается парами чисел ряда Фибоначчи. Кстати и ЗГФ у него больше походят на красивое оформление (декорацию) действительно интересных результатов, которые с таким же успехом получаются напрямую при обычном рассмотрении самой функции Фибоначчи в ее непрерывной интерпретации (1).

Существуют и другие варианты альтернативных решений, которые легко обходятся без привлечения теории гиперболичности, преимущественно тяготеющей к рассмотрению закономерностей больших чисел.

А общий список оригинальных работ в этой области насчитывает несколько сотен, например [24–27].

Да и странно порой выглядит не только применение, но и упоминание теории гиперболичности в кубическом метре евклидового пространства, будто речь идет о гигантских кактусах и шишках, в которые собираются созвездия и галактики, где и впрямь без идей Н.И. Лобачевского трудно рассчитывать на успех.

Действительно, «чтобы разгадать мир, надо глядеть на него разными глазами», ... только не через розовые очки и без фортификации гиперболических лабиринтов и других искусственных нагромождений на пути к познанию гармонии мироздания.

Проводя аналогии, можно сказать, что непрерывная функция Фибоначчи – это дорога-серпантин, ГФФЛ – контуры дороги, а числа Фибоначчи – поочередные левые и правые указатели.

Спокойно двигаться по этой надежной, много раз проверенной и опробованной дороге можно и без всяких ГФФЛ, которые есть аппендикс к функции Фибоначчи и не более того.

Он вроде и не мешает, но при определенных условиях от него одни неприятности, когда без бритвы Оккама просто не обойтись.

Как часто бывает в научных изысканиях, истина вырисовывается обычно совсем рядом. Только идти к ней следует непредвзято, без искажения данных и игры в понятия, оставаясь честным перед самим собой и своими коллегами.

Отсутствие такой правдивости и гиперболизация поспешных выводов автоматически вызывает недоумение, переходящее в раздражение, становится объектом для критических стрел или просто замалчивается без обращения на него какого-либо внимания по принципу первого эпиграфа: мало ли кто чего говорит.

«Существует алгоритм, гарантированно выводящий из любого лабиринта. При движении нужно неукоснительно делать повороты только в одну сторону (или вправо, или влево). Этот длинный путь неизбежно приведет к выходу» [28].

К сожалению, к числам Фибоначчи он слабо адаптирован, поскольку по пути к своему аттрактору ("золотому" сечению) они постоянно пребывают в равнопеременном колебании, похожим на вереницу поворотов.

Поэтому предлагается другой, более простой и испытанный временем способ: не создавать лишних сущностей, лабиринтов и препятствий, чтобы их потом мужественно преодолевать, что воочию проявляется на примере ГФФЛ.

Литература.

1. *Стахов А.П.* Какой тип "золотых" гиперболических функций использует Природа в ботаническом явлении филлотаксиса? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15476, 16.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321148.htm.
2. *Пойа Д.* Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. – 452 с.

3. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

4. *Hoggat V.E.* Fibonacci and Lucas Numbers. – Palo Alto, California: Houghton-Mifflin, 1969. – 92 p.

5. *Vajda S.* Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications. – Ellis Horwood limited, 1989. – 190 p.

6. *Honsberger R.* Mathematical Gems // Dolciani Math. Expositions, vol. 1. / Math. Assoc. of America, Washington DC, 1973. – P. 171–172.

7. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Физматиздат, 1959. – 400 с.

8. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах / Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. – М.: Наука, 1987. – 432 с.

9. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.

10. *Шерватов В.Г.* Гиперболические функции. – М.: Техникотеоретиздат, 1954. – 58 с.

11. *Боднар О.Я.* Геометрия филлотаксиса // Доклады Академии наук УССР. – 1992. – № 9. – С. 9–14.

12. *Боднар О.Я.* Золотое Сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. – Львов: Свит, 1994. – 204 с.

13. *Ясинский С.А.* О роли "золотой" математики в создании междисциплинарной науки и развитии культуры // Личность и культура. – 2003. – № 3–4. – http://lichnost-kultura.narod.ru/2003/20033/2003311/2003311.htm.

14. *Ясинский С.А.* Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей и место в ней "золотого" сечения.– СПб.: ВАС, 2006. – 124 с.

15. *Стахов А.П.*, *Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады АН Украины, 1993. – Т. 208, № 7. – С. 9–14.

16. *Stakhov A.*, *Rozin B.* On a new class of hyperbolic function // Chaos, Solitons & Fractals. – 2004. – **23(2).** – P. 379–389 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13260, 02.05.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321042.htm.

17. *Митропольский Ю.А.* О роли математики в научно-техническом прогрессе // Докл. Республ. науч. конф. «Математика и научно-технический прогресс». – Киев, 1973.

18. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

19. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

20. *Стахов А.П.* Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод "золотой" криптографии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm.

21. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14931 от 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.

22. *Василенко С.Л.* "Золотые" гиперболические миры // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15103 от 17.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321094.htm.

23. *Браже Р.А.*, *Мефтахутдинов Р.М.* Концепции современного естествознания: Учеб. пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 143 с.

24. *Джан Р.В.* Филлотаксис: системное исследование морфогенеза растений: Пер. с англ. – М.; Ижевск: НИЦ "РХД", Ин-т компьютерных исследований, 2006. – 464 с.

25. *Малыгин А.Г.* Использование закономерностей ряда Фибоначчи для построения общей теории филлотаксиса // Сб. докл. XII симпоз: «Перестройка естествознания в третьем тысячелетии». – М.: Политех. музей, 2003. – С. 83–84.

26. *Радзюкевич А.В.* Метод геометрического построения спиральных решеток. – 09.07.2007. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/5.

27. *Кокстер Г.С.* Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966. – 648 с.

28. *Попов В.П.*, *Крайнюченко И.В.* Управление и самоорганизация в социальном веществе // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15506, 03.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161537.htm.