С.Л. Василенко

Идентификация рекуррентных рядов

Словно невидимой паутиной окутали земной шар, Вселенную и человека различные числовые образы-последовательности, создавая ажурно-фрактальные кружева мироздания.

Достаточно посмотреть на захватывающие дух многоликие снимки неба, выполненные с помощью мощных телескопов, или на кристаллические структуры под микроскопом.

Самих чисел в природе мы не наблюдаем.

Вернее то, что мы выявляем, на самом деле ими не является, поскольку числа – человеческая абстракция. Но это с лихвой восполняется проявлением их разнообразных свойств, с помощью которых изучаем и познаем мир.

Так, мы не знаем, что такое число 7, не можем его потрогать, измерить или во что-то завернуть, но зато располагаем косвенной информацией о свойствах и качествах числа 7, прекрасно ощущая (осязая) его признаки в виде радуги, дней недели, нот и т.п.

Как правило, числовые ряды создаются, описываются, квалифицируются, регистрируются и ... складываются на полку, надо полагать до лучших времен,

Но возможно, к ним уже никогда и никто больше не обратится.

И лишь немногие из них время от времени находят применение в теории и практике исследований. Ничего не поделаешь, – таковы законы тернистого пути к знаниям.

Апостериори известное или разгаданное становится мало интересным.

Одно время, например, довольно любопытно было наблюдать за ноу-хау Н. Косинова в виде построения счетного множества последовательностей [1, 2] в энциклопедии Нейла Слоэна. Взяв за основу обычное, известное со школы квадратное уравнение с его двучленно-аддитивным разностным аналогом, он начал буквально штамповать многочисленные числовые последовательности, различаемые лишь сочетанием двух коэффициентов.

На сегодня созидательный процесс приостановлен, хотя теоретически мог бы спокойно продолжаться до пенсии праправнуков и далее. Мало того, можно было бы еще видоизменять исходные условия (затравочные числа), "все опять начиная сначала".

Воистину велик человеческий гений, и неукротима его энергия.

В любом случае, жизнь без мира чисел стала для нас немыслима.

Часто даже говорят "живой мир чисел" или просто "живые числа". А по образному выражению Пифагора с его глубоким философским содержанием "Числа правят миром".

Некоторые из них мы выделяем особо, и тогда они становятся хрестоматийными константами и своеобразными эталонами для сравнения.

Поэтому, получая в процессе исследований те или иные числовые значения-результаты, часто задаемся вопросом, а не являются ли они проявлением (коррелятором) других известных чисел (величин).

Например, определив (в процессе решения какой-либо задачи) число 144, на ум сразу приходит 12 в квадрате. А 64 шахматным клеточкам мы сопоставим число 2^6 и т.д.

Только на базе обычного квадратного уравнения с разными коэффициентами можно сформировать миллиарды различных последовательностей.

Но так уж они все необходимы? И надо ли их все время держать в поле зрения?

Конечно, нет, и "сохранять" их лучше в свернутом архивированном виде, задавая (когда нужно) затравочные числа и рекуррентную процедуру, например, одну общую на все квадратные уравнения. В противном случае мы приходим к дискредитации идеи об энциклопедическом собрании действительно уникальных числовых последовательностей с особыми и неповторимыми свойствами.

Так, в работе [3] доказано, что любое натуральное число может быть представлено элементом обобщенной последовательности Фибоначчи в общем случае с произвольными начальными условиями.

В теории систем подобные модельные структуры называются причинно обусловленными [4, с. 25], когда значение элементов ряда ("выходного сигнала") на произвольном шаге зависит от его значений в более ранние моменты, начиная с исходных значений.

То есть не существует такого целого положительного числа, которому нельзя было бы сопоставить пару начальных условий последовательности Фибоначчи, воспроизводящей это число на некотором шаге аддитивно-последовательной рекурсии.

Поэтому нам не нужно держать в памяти все эти числа. Достаточно при необходимости организовать нетрудную поисковую процедуру и выйти на начальные условия Фибоначчи.

Вполне естественным становится повышенный интерес и к другим подобным рядам, формируемым по аддитивной схеме разностных (возвратных) уравнений общего вида.

При этом без потери общности рассуждений можно ограничиться рассмотрением только целочисленных переменных.

Итак, мы подошли к понятию *идентификации рекуррентного ряда* – восстановлению вида и начальных условий линейного разностного уравнения для заданного числа N.

Напомним, что в общем случае предметом теории идентификации является «решение задач построения математических моделей динамических систем по данным наблюдения за их поведением» [4, с. 15].

В качестве математической модели у нас выступает исходное линейное разностное уравнение заданного типа. Роль данных наблюдения играет натуральное число N.

Например, простая задача. Имеем число 123 456 789, найти начальные условия последовательности Трибоначчи, воспроизводящей это число.

Или определить последовательность 7-боначчи, содержащую куб числа 137.

В общем случае базой может служить алгебраическое уравнение степени n с неизвестным x и действительными коэффициентами a_j

$$x^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \qquad (1)$$

и его линейно-разностное представление [5–7] $(t = 0, 1, 2, ...)$

$$x_{n+t} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_{j+t} \; . \qquad (2)$$

Уравнение (1) представлено в таком виде специально, чтоб наиболее отчетливо высветить взаимосвязь с его разностным аналогом (2): верхний индекс (степенной) переменной x становится ее нижним (порядковым), и к нему прибавляется другая переменная t, символизирующая развитие процесса во времени в дискретных точках.

Несмотря на незамысловатость записи (1)–(2), мы фактически выходим на весьма общее представление колоссального множества рекуррентных рядов.

В это связи следует отметить и пояснить один простой, но очень важный момент, который до сих пор нередко вызывает путаницу вследствие безграмотно используемой терминологии.

Одним из частных случаев (1)–(2) является уравнение "золотого" сечения

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2+t} = x_{1+t} + x_t \, , \qquad (3)$$

где $x = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – отношение большей части целого к его меньшей части.

Берется другой подкласс уравнений (1)–(2), например,

$$x^n = x^{n-1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+t} = x_{n-1+t} + x_t . \tag{4}$$

Исходя из того, что пара уравнений (3) является частным случаем (4) при $n = 2$, все решения в подклассе (4) объявляются "обобщениями (кодами) золотого сечения". – Налицо явное нарушение правил формальной логики и причинно-следственных отношений.

Покажем это.

Учитывая, что (3) является частным случаем не только (4), но и (1)–(2), проводим аналогичную псевдонаучную логику и приходим к утверждению, что уравнения (1)–(2) тоже дают "коды золотого сечения". Другими словами, произвольное алгебраическое уравнение, а значит и его решение, обобщает "золотое" сечение (ЗС). Но своими решениями алгебраическое уравнение (1) практически охватывает всю числовую ось!

То есть по этой противоречивой логике:

√ всякое квадратное или кубическое уравнение – это обобщенные "золотые" сечения!?

√ практически любое действительное число, которому можно сопоставить решение (действительный корень) уравнений (1)–(2), – это тоже обобщенное "золотое" сечение!?

√ почти вся числовая ось – сплошное "золотое" сечение!?

Все эти утверждения противоречат не только азбучным основам математики и классическому определению гармонической пропорции, но и просто здравому смыслу.

Откуда следует, что "кодов золотого сечения" нет, но есть только одно самостоятельное и уникальное число-отношение "золотого" сечения Φ, то есть,по-моему:

"коды (обобщения) золотого сечения" – бессодержательная ненаучная идиома.

В основу наших построений положим теорему Бернулли[1] [6, 7], согласно которой, если λ– единственный наибольший по модулю корень уравнения (1), то линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (2) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+1}/x_t = \lambda$.

Согласно этой теореме соседние члены возвратной последовательности изменяются так, что с удалением от начальной точки их отношение стремится к максимальному по модулю корню характеристического алгебраического уравнения.

Даниил Бернулли формулировал свою теорему, преследуя цель построения формализованных процедур для рекуррентно-приближенного вычислении корней алгебраических уравнений произвольного порядка.

Однако ничто не мешает решать обратную задачу: заранее зная максимальный по модулю корень исходного уравнения, исследовать свойства образующихся рекуррентных последовательностей.

По мере роста параметра t отношение x_{t+1}/x_t все точнее приближается к решению λ.

На некотором этапе различие становится все меньшим так, что последующий член ряда становится равным округленному до целого произведению предшествующего элемента на корень уравнения, то есть $x_{t+1} = \langle x_t \lambda \rangle$, где $\langle \xi \rangle$ – знак округления ξ до ближайшего целого.

В программировании $\langle \xi \rangle$ соответствует операнду или встроенной функции round(ξ).

Именно эти свойства подсказывают нам идею и дают основу для разработки метода идентификации рядов.

---

[1] Даниил Бернулли (1700–1782) выдающийся швейцарский физик и математик, сын Иоганна Бернулли. В его работе «Замечания о рекуррентных последовательностях» (1732) изложен рекуррентный метод решения алгебраических уравнений.

А идея метода весьма простая:
реверсный метод идентификации рекуррентных рядов заключается в том, что для натурального числа N по прямой рекурсии определяются значения элементов ряда в направлении его возрастания, а уже по найденным величинам через обратную рекурсию восстанавливаются начальные условия и весь ряд, содержащий заданное число N.

Реверсный метод идентификации рекуррентных рядов.

1. *Игровое поле*: задаем конкретный вид линейного алгебраического уравнения и вычисляем его наибольший по модулю действительный корень λ, или тоже задаем, если он уже известен: например, число Φ для последовательностей Фибоначчи.

2. *Прямая рекурсия*: исходя из мультипликативных свойств, строим опорные точки ряда прямого (возрастающего) хода:

$$x_s = N, \quad x_{s+t} = \langle x_{s+t-1}\lambda \rangle,\ t = \overline{1, n-1}.$$

3. *Обратная рекурсия*: организуем аддитивный цикл возвратного хода и определяем из исходного уравнения (1) значения $x_t = \dfrac{1}{a_0}\left(x_{t+n} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_{t+j} \right)$, $t < s$ пока $x_t \le x_{t+1}$.

```
f0(n,N) := | (X  n'  s  xs) ← (2  n−1  50  N)
           |                  n'
           | λ ← root( X^n −  Σ   aj·X^j , X )
           |                 j=0
           | for t ∈ 1..n'
           |   x(s+t) ← round( x(s+t−1)·λ )
           | for t ∈ s−1..1
           |   |           1              n'
           |   | xt ←  ——— · ( x(t+n) −  Σ   aj·x(t+j) )
           |   |          a0             j=1
           |   | break if xt > x(t+1)
           | t ← t+1 if x(t+1) < 0
           | for j ∈ 0..n'
           |   zj ← x(t+1+j)
           | (zn  z(n+1)) ← (s−t−1  λ)
           | z
```

Рис. 1. Программа в MathCad для идентификации рекуррентных последовательностей, содержащих вводимое натуральное число N

Вначале порядковый номер числа N в рекуррентной последовательности нам еще не известен, поэтому присваиваем ему некоторое произвольное значение, например $s = 50$, то есть $x_s = N$.

После завершения процедуры на t-м этапе, получаем искомые начальные условия и $s-t-1$ – порядковый номер числа N в рекуррентной последовательности (рис. 1).

При выполнении реальных расчетов следует не забывать включать режим повышенной точности определения корней, например TOL=10^{-15}.

Реверсный метод позволяет для натурального числа N восстановить n начальных условий для заданного алгебраического уравнения n-й степени.

Алгоритм действительно простой.

Но в этом и вся его прелесть, а также величие математической мысли именитого Д. Бернулли.

В таком виде метод в основном применим для монотонно возрастающих последовательностей.

В общем виде он корреспондируется с поведением гармонической пропорции в линейных разностных уравнениях [6].

Идейно и методологически он весьма похож на изложение математически обоснованной теории рациональных золотых сечений в целочисленных переменных [3].

Поэтому не видим особой необходимости в его строгой математизации.

Ответим только на вопрос о необходимости применения прямой рекурсии (в сторону возрастания *t*) в то время как в итоге ищутся начальные условия. Можно ли сразу начинать счет в обратном порядке, например по формуле $x_{s-t} = \left\langle x_{s-t+1}\lambda^{-1} \right\rangle$?

В отдельных случаях можно. Но в общем случае целесообразно найти несколько значений по прямой рекурсии, а уже потом – по обратной.

Вероятность правильности расчетов при этом существенно возрастает

Любой метод имеет свой диапазон применения (ограничительные рамки).

Наш метод – не исключение, и об этом следует открыто говорить

Ограничения реверсной идентификации.

1. Если число – небольшое по величине или незначительно отстоит от начала идентифицируемого ряда, то могут происходить сбои, вызванные возникновением образно говоря "зоны неуверенного приема", – по радиолокационной терминологии.

2. Поиск и идентификация осуществляется среди монотонно возрастающих числовых последовательностей.

<u>Первое</u> утверждение соответствует ситуации, когда соотношение Бернулли далеко от своего предельного выражения и еще не носит установившийся (стабильный) характер приближения к своему аттрактору – корню уравнения.

Это означает, что полагая $x_s = N$ и вычисляя $x_{s+1} = \left\langle N\lambda \right\rangle$, мы еще не попадаем на истинное значение вычисляемого (идентифицируемого) ряда, а значит, обратной рекурсией не восстановим его подлинные начальные значения.

Многочисленные численные эксперименты показали, что такая ситуация встречается довольно редко. Но, тем не менее, она возможна.

Можно, конечно доказать теорему и математически четко сформулировать условия, при которых мы гарантировано входим в "зону уверенного приема", – по аналогии с последовательностями в теории рационального "золотого" сечения (РЗС) [3].

В частности, показано, что свойствами РЗС обладают члены последовательности (обобщенные числа Фибоначчи) с порядковыми номерами $t > \dfrac{\ln 2 + \ln(|f_1 - f_0\Phi|)}{\ln \Phi}$.

Вероятно, что это даже представляет значимый теоретический интерес в области теории чисел. Хотя на данном этапе нам пока достаточен прикладной характер метода в виде его практического применения. Тем более что корректность решения идентификационной задачи очень просто устанавливается элементарной проверочной прогонкой ряда в прямом направлении, начиная с вычисленных начальных условий.

То есть истинность найденного решения легко устанавливается верификацией ряда, что без малейших затруднений осуществляется при машинных расчетах.

<u>Второе</u> утверждение обусловлено алгоритмическим характером вычислений, когда процесс поиска прерывается, если предшествующее значение ряда становится больше предыдущего $x_t > x_{t+1}$.

В частности, идентификация последовательности Люка приведет к начальным условиям $(x_0, x_1) = (1, 3)$ вместо привычной пары $(2, 1)$. Но это нисколько не влияет на суть решения, поскольку $3 - 1 = 2$, то есть сам ряд восстанавливается совершенно правильно, но происходит временной сдвиг на один шаг.

"Размышлизмы" о главном

Размышления позволяют немного расслабиться, и в свободном, раскрепощенном течении мысли плавно плыть по руслу основной темы, время от времени делая остановки на разных берегах для переосмысления старых и поиска новых идей.

1. Общее–частное. Обратим внимание, что в увязке с нашим подходом (методом) мы специально не употребляем дефиниции вроде обобщенной или универсальной схемы-способа и т.п., поскольку мягко говоря, это лишено особого смысла. Равно как все слова записывать с большой буквы, крупным шрифтом и т.п. – Обычно это от слабости позиций, шаткости убеждений или недостатка аргументов.

Хотя изложенный нами подход вполне приемлем для постановки идентификационных числовых задач более широкой природы.

Возникает и другой вполне правомерный вопрос, как и почему такая широкая тема "общее–частное" касается рассматриваемой темы?

– Очень просто. Сама по себе несчетная армада числовых рядов обычно не несет особой смысловой нагрузки.

Но вот идентификация конкретных чисел (результатов исследований), с точки зрения их принадлежности к тому или иному классу числовых объектов, представляется важной, поскольку может вывести на порождающие разностные (возвратные) уравнения.

А уже на этой основе можно формировать другие полезные логические цепочки рассуждений и формулировать соответствующие выводы. Ведь совершенно ясно, что генерирующие уравнения типа (1)–(4), подобно генетическому коду числовых последовательностей, в сжатой форме несут в себе несоизмеримо больше информации, чем отдельные элементы или ограниченные совокупности элементов ряда.

Найти (выудить) эти и им подобные соотношения в безбрежных океанах чисел – большая удача для исследователя. Но маловероятно, чтобы отдельно взятое число сразу нас вывело на подходящее уравнение с приемлемыми и легко интерпретируемыми начальными условиями. И здесь нет готовых рецептов.

Следует попробовать и другие числа-кандидаты, а потом еще раз...

– А там, как знать?..

2. Идентификация в эзотерической математике... Рассмотрим подробнее еще один аспект, по праву претендующий на самостоятельное направление исследований в эзотерической математике, которая в компьютерный век превращается в достаточно мощное средство для получения и интерпретации новых знаний.

Прежде всего, отметим следующий методологический аспект.

Нет традиционной или нетрадиционной математики.

Равно как нет "математики гармонии" или "математики дисгармонии".

Математика одна. Даже не две или три, а только одна.

И то, что она очень разная, в общесистемном контексте ни о чем не говорит.

Да, она весьма обширная и крайне многоликая (арифметика, алгебра, геометрия и др.).

Но любые деления – это в определенной мере условности или профессионально-классификационные вешки-указатели.

Даже если спросить у профи-математика, что такое математика? – скорее всего, услышим ответ, что математика – это то, чем занимается он.

В этой связи представляется, что предложенный выше подход может оказаться весьма полезным в эзотерической области математики, а это отчасти является продолжением темы, начатой в работе [8] и последовавшей за ней публикации [9] полемической направленности.

Так или иначе, но де факто вступая в заочный диалог с А. Кореневым [9], можно сразу отметить, что по большому счету в своей критике он во многом прав, а по частностям дискутировать не интересно.

Дадим только свой краткий ответ на один его вопрос, где же были все математики, когда открывались «обобщенные золотые сечения»?

– Все математики были и остаются на месте. Они прекрасно понимали раньше, знают и сейчас, что «обобщенные золотые сечения» – это фикция. "Золотое" сечение – уникально и по определению одно единственное, других его кодов онтологически быть не может.

Остальные "золотые подвески" – фальшивые, как издержки самозваных авторских терминологий, применяемых ими ради красного словца в погоне за сенсациями.

И это вполне адекватное заключение на самовозвеличение и отсутствие самокритичности у авторов и соавторов (солистов и подпевал) подобных псевдонаучных обобщений. Об уникальности и принципиальной необобщаемости золотого сечения, кстати, свидетельствует и вся история развития эзотерики и числонавтики, которые предельно ясно и многогранно показывают и демонстрируют уникальную неповторимость многих чисел.

На языке этих теорий можно легко показать, что редкостные особенности ЗС также принципиально неповторимы никакими другими числовыми обобщениями.

Число-константу обобщить нельзя!!

Попробуйте обобщить другие числа: 7, 137, 666, 6174, π ...

Как божий день ясно, что каждое число – уникально. Но некоторых все равно не покидает маниакальная идея хоть как-то раздуть константу Ф новыми эфемерными кодами "золотого" сечения, а заодно и самим "погреться" в лучах его сияния.

В целом же нам остается лишь привести и согласиться с основополагающей мыслью А. Коренева: «Локальные (специфические) манипуляции с элементами любой цифровой структуры способны проявлять закономерности их естественного существования в числовом континууме». Вполне серьезно и без всякой иронии эту мысль можно интерпретировать и другими известными словами «Если долго мучиться, что-нибудь получится» (см. п. 1).

Такой своеобразный эпиграф к числовым манипуляциям, вовсе необязательно производимым только ручным способом. Нужно просто фантазировать и искать.

В целом исследуемая нами задача по идентификации рекуррентных числовых последовательностей находится именно в этом ключе, помогая восстанавливать картину и пути появления разных чисел, которым мы хотим придать ту или иную интерпретацию.

Осуществив переход от частного к общему, можно записать исходное уравнение, и уже на его основе попытаться проверить иные свойства, сопутствующие данному (исследуемому) числу, – с переходом от общего к частному.

Как бы там ни было, но метод реверсной идентификации рекуррентных рядов дает еще один инструмент для исследования свойств чисел, характеризуемым сегодня таким понятием, как эзотерическая математика, способная «преобразовывать, превращать, трансформировать числовые и цифровые объекты в новые формы представления» [http://www.numbernautics.ru].

В качестве примера, приведем результаты идентификации аддитивных рядов на предмет содержания известных в математике – постоянных Капрекара (табл. 1, 2).

Довольно интересен 8-й ряд в табл. 2, содержащий 8 начальных условий, из которых три – нулевые, а остальные пять – это степени двойки.

Кроме того, в обоих случаях имеются ряды, в которых первое число равно нулю.

Возможно, это прольет свет на то, что число шагов схождения к математическим константам задается разными мерами: 7 шагов для четырехзначных чисел и 6 шагов для трехзначных. Так или иначе, но переходы на нулевые значения $f_0 = 0$ не являются случайными. Последовательность Фибоначчи с затравочными числами (0, 9) в табл. 1 действительно на 10-м шаге приводит к числу 495=9·55, где 55 – 10-е число Фибоначчи.

Другими словами, образуется масштабированная последовательность, каждый элемент которой по отношению к числам Фибоначчи увеличен ровно в 9 раз.

Таблица 1

Результаты идентификации рекуррентных рядов *n*-боначчи, содержащих постоянную Капрекара $N = 6174 = f_t$

n	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	t	λ
2	36	90									10	1,61803
3	4	4	17								12	1,83929
4	2	2	3	10							13	1,92756
5	6	7	13	29	53						11	1,96595
6	1	3	7	13	25	52					12	1,98358
7	1	1	2	3	6	13	24				14	1,99196
8	0	1	1	2	2	8	10	25			15	1,99603
9	0	1	4	6	12	24	49	97	194		13	1,99803
10	1	1	1	4	6	12	24	48	97	193	14	1,99902

Примечание:

последовательности $n = 2$ – Фибоначчи, $n = 3$ – Трибоначчи; n – порядок уравнения;

$f_0 .. f_{N-1}$ – идентифицированные начальные условия;

t – номер шага, на котором достигается заданное число N;

λ – максимальный по модулю действительный корень алгебраического уравнения.

Таблица 2

Результаты идентификации рекуррентных рядов *n*-боначчи, содержащих постоянную Капрекара $N = 495 = f_t$

N	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	T	λ
2	0	9									10	1,61803
3	3	6	14								8	1,83929
4	2	3	5	9							9	1,92756
5	1	1	1	2	4						11	1,96595
6	0	2	5	8	16	32					9	1,98358
7	1	4	8	16	31	63	125				8	1,99196
8	0	0	0	1	2	4	8	16			12	1,99603
9	1	2	4	8	16	31	62	124	247		9	1,99803

Выводы.

1. Разработан и изложен реверсный метод идентификации рекуррентных рядов, который позволяет практически для любого заданного натурального числа восстановить порождающую модель его образования в виде линейного разностного уравнения.

В частных случаях это могут быть обобщенные последовательности *n*-боначчи (Фибоначчи, Трибоначчи и др.), квадратные, кубические и многие другие, порождающие алгебраические уравнения с их разностными (возвратными) аналогами.

2. Продемонстрирована возможность применения реверсного метода в эзотерической математике на примере идентификации рядов с числами Капрекара.

3. На основе анализа линейных алгебраических уравнений общего вида и исследования принципов формирования числовых констант показана принципиальная невозможность теоретического обобщения "золотого" сечения и, как следствие, бессодержательность лженаучной идиомы "коды (обобщения) золотого сечения".

Литература:

1. *Косинов Н.В.* Золотые инварианты гармонических последовательностей // Клуб Константа. – http://kosinov.314159.ru/kosinov20.htm.

2. *Косинов Н.В.* Гармонические последовательности // Клуб Константа. – http://kosinov.314159.ru/kosinov21.htm.

3. *Василенко С.Л.* Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15274 от 08.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

4. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Ципкина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 432 с.

5. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

6. *Василенко С.Л.* Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.

7. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.

8. *Василенко С.Л.* Периодичность теософской редукции для линейных возвратных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15368, 27.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321130.htm. – http://www.numbernautics.ru/.

9. *Корнеев А.А.* Математико-числонавтический консенсус // Числонавтика. – http://www.numbernautics.ru/content/view/529/30/.